Ejercicios 01
Ejemplos de funciones integrables

Ejercicio 1. *Sean $b > 0$ y $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Demuestre que f es integrable en $[0, b]$ y además $\int_0^b f = \frac{b^3}{3}$.*

Demostración. Para hacer esta prueba, primero tratemos de calcular las sumas superiores y las sumas inferiores. Así, sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la partición homogénea $P_n \in \mathscr{P}_{[0,b]}$ en n subintervalos del intervalos de la misma longitud, esto es, tenemos que $t_i = \frac{i(b-0)}{n} = \frac{ib}{n}$ y cada subintervalo tiene longitud $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$. Ahora, ya que f es una función (estrictamente) creciente (¿puede demostrarlo?), obtenemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} m_i &= \operatorname{ínf}\left\{ f(x) \;\middle|\; \frac{(i-1)b}{n} \le x \le \frac{ib}{n} \right\} \\ &= \operatorname{ínf}\left\{ x^2 \;\middle|\; \frac{(i-1)b}{n} \le x \le \frac{ib}{n} \right\} \\ &= \left(\frac{(i-1)b}{n} \right)^2 = \frac{(i-1)^2 b^2}{n^2} \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\left\{ f(x) \;\middle|\; \frac{(i-1)b}{n} \le x \le \frac{ib}{n} \right\} \\ &= \sup\left\{ x^2 \;\middle|\; \frac{(i-1)b}{n} \le x \le \frac{ib}{n} \right\} \\ &= \left(\frac{ib}{n} \right)^2 = \frac{i^2 b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(i-1)^2 b^2}{n^2} \right) \left(\frac{b}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b^3}{n^3} (i-1)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) = \frac{b^3 (n-1)(2n-1)}{6n^2} \\ &= b^3 \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \\ &= \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2} \end{aligned}$$

y además,

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2b^2}{n^2}\right)\left(\frac{b}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{b^3}{n^3}i^2\\
&= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{b^3(n+1)(2n+1)}{6n^2} = b^3\left(\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\right)\\
&= \frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}
\end{aligned}$$

Ahora, observamos que

$$\sup\left\{\underline{S}\,(f,P_n)\mid n\in\mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\frac{b^3}{3}-\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} = \frac{b^3}{3}$$

y también

$$\text{ínf}\left\{\overline{S}\,(f,P_n)\mid n\in\mathbb{N}\right\} = \text{ínf}\left\{\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\} = \frac{b^3}{3}$$

Ya que

$$\{\underline{S}(f,P_n)\mid n\in\mathbb{N}\}\subset\{\underline{S}(f,P)\mid P\in\mathscr{P}_{[0,b]}\},$$

a partir de las propiedades del supremo se sigue que

$$\frac{b^3}{3} = \sup\{\underline{S}(f,P_n)\mid n\in\mathbb{N}\} \color{red}{\leq} \sup\{\underline{S}(f,P)\mid P\in\mathscr{P}_{[0,b]}\} = \underline{\int_0^b} f$$

De manera similar, como

$$\{\overline{S}(f,P_n)\mid n\in\mathbb{N}\}\subset\{\overline{S}(f,P)\mid P\in\mathscr{P}_{[0,b]}\},$$

por las propiedades del ínfimo se cumple que

$$\overline{\int_0^b} f = \text{ínf}\{\overline{S}(f,P)\mid P\in\mathscr{P}_{[0,b]}\} \color{red}{\leq} \text{ínf}\{\overline{S}(f,P_n)\mid n\in\mathbb{N}\} = \frac{b^3}{3}$$

así que al juntar toda la información anterior obtenemos que

$$\frac{b^3}{3}\leq\underline{\int_0^b} f\leq\overline{\int_0^b} f\leq\frac{b^3}{3}$$

lo cual implica que

$$\underline{\int_0^b} f = \overline{\int_0^b} f = \frac{b^3}{3}$$

y por lo tanto f es integrable sobre $[0,b]$, y además

$$\int_0^b f = \frac{b^3}{3}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 2 (Función de Thomae, o función *palomita de maíz*, o función "pinito")**.** *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0, \\ 0 & si\ x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ \frac{1}{q} & si\ x \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ \ x = \frac{p}{q},\ \ p,q \in \mathbb{Z},\ \ q > 0,\ \ \mathrm{mcd}(p,q) = 1. \end{cases}$$

Entonces f *es integrable en* $[0,1]$ *y además* $\int\limits_0^1 f = 0$.

Demostración. Observamos que por definición de f se cumple que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [0,1]$. Además, si $[a,b] \subset [0,1]$, entonces existe $x_0 \in [a,b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, así que para cualquier subintervalo $[a,b]$ de $[0,1]$ se cumple que $0 = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Esto último implica que para cualquier partición $P \in \mathscr{P}_{[0,1]}$ se cumple que $\underline{S}(f,P) = 0$, y por lo tanto

$$\underline{\int_0^1} f = \sup\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[0,1]}\} = \sup\{0\} = 0.$$

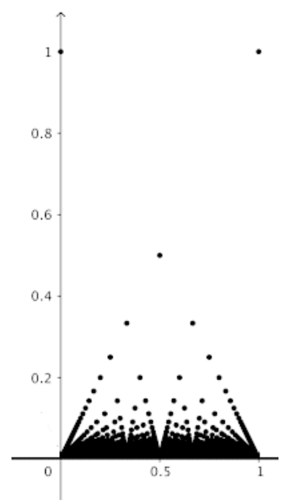

Figura 1: Gráfica de la función de Thomae. (Imagen modificada de la que aparece en https://bestiariotopologico.blogspot.com/2016/02/la-funcion-de-las-palomitas-thomae.html)

Ya que vamos a utilizar la definición de función integrable sobre un intervalo, debemos demostrar que la integral superior de f en $[0,1]$ también vale cero, esto es, demostraremos que $\overline{\int}_0^1 f = \inf\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[0,1]}\} = 0$. En primer lugar, es claro que $\overline{\int}_0^1 f \geq 0$ porque todas las sumas superiores son no negativas. Por ello, usaremos la caracterización del ínfimo, es decir, mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$, se cumple que para $\varepsilon = 0 + \varepsilon$ existe $P_\varepsilon \in \mathscr{P}_{[0,1]}$ tal que $\overline{S}(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$ (vea el **Lema 13** de los **Preliminares 01**).

Iniciemos la prueba mencionada. Sea $\varepsilon > 0$. Note que si hacemos la prueba para $\varepsilon < 1$, entonces se obtiene la prueba para los valores mayores que 1 (pues basta considerar una de las particiones que se obtienen), así que supondremos, sin pérdida de generalidad, que además $\varepsilon < 1$. Consideremos $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Observemos que E es un conjunto finito. Para probar esto, note que por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, podemos considerar $N_0 = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{N} <$

$\frac{\varepsilon}{2}\}$ (el cual existe por el principio del buen orden ya que estamos considerando un subconjunto no vacío de números naturales)[1]. Luego, para toda $n \in \mathbb{N}$ con $n < N_0$ se verifica que $\frac{1}{n} \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Esto implica que los únicos valores $x \in E$ son aquellos de la forma $\frac{m}{n}$ con $1 \leq m \leq n$ y el cero, esto por la definición de f, y son una cantidad finita de números, lo cual prueba lo deseado.

Denotemos por k al número de elementos de E. Observe que por construcción $k \neq 0$ (¿por qué?), así que, para $\frac{\varepsilon}{2k} > 0$, por la propiedad arquimediana existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{M_0} < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{1}$$

Sea P_ε la partición homogénea de $[0,1]$ en M_0 subintervalos. Definimos los conjuntos de índices

$$I_1 = \{i \in \{1,\ldots,M_0\} \mid E \cap [t_{i-1},t_i] = \varnothing\}$$

e

$$I_2 = \{i \in \{1,\ldots,M_0\} \mid E \cap [t_{i-1},t_i] \neq \varnothing\}$$

Note que si $i \in I_1$, entonces $[t_{i-1},t_i]$ no contiene ningún elemento de E, por lo cual

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1},t_i]\} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, si $i \in I_2$, entonces $M_i \leq 1$ por la definición de f. Además, como E tiene k elementos, hay a lo más k índices en I_2.

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{M_0} M_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i\in I_1} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in I_2} M_i(t_i - t_{i-1}) \qquad (2)\\
&\leq \sum_{i\in I_1} \frac{\varepsilon}{2}(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in I_2} 1(t_i - t_{i-1}) \qquad (3)\\
&= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i\in I_1} (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in I_2} (t_i - t_{i-1}) \qquad (4)\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{M_0} \qquad (5)\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + k\frac{\varepsilon}{2k} \qquad (6)\\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

donde (2) se obtiene al repartir los índices según a que subconjunto pertenece; (3) se cumple porque los sumandos de la primera suma cumplen que $M_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$ porque $i \in I_1$, mientras que en la segunda suma se tiene que $M_i \leq 1$ para cada $i \in I_2$; (4) se obtiene por una propiedad de la notación sigma; (5) se cumple porque la primera parte es la suma de las longitudes de los subintervalos $[t_{i-1},t_i]$ para $i \in I_1$, pero todos ellos están contenido en el intervalo $[0,1]$, por lo cual, dicha suma es menor que 1, mientras que en la segunda suma aparecen a los más k sumandos y, como la partición es homogénea, cada sumando que aparece es igual a $\frac{1}{M_0}$; finalmente, (6) se obtiene a partir de la ecuación (1). Esto prueba que $\overline{S}(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Por lo tanto,

$$\overline{\int_0^1} f = \inf\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[0,1]}\} = 0.$$

[1] Si esto no es claro, puede preguntar. Es mejor preguntar y que la respuesta sea corta, que no preguntar y quedarse con la duda.

En conclusión, por la definición de función integrable, se tiene que $\int_0^1 f = 0$. ■