Ejercicios 02
Particiones homogéneas e integrabilidad

En esta sesión demostraremos el resultado que nos permitirá calcular, por ahora, el valor explícito de algunas integrales.

Proposición 1. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$ y $\{P_n\}$ la sucesión de particiones homogéneas del intervalo $[a,b]$. Entonces*

$$\sup\{\underline{S}(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \int_a^b f = \text{ínf}\{\overline{S}(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

De hecho, las igualdades anteriores se pueden expresar como

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,P_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,P_n). \tag{2}$$

Demostración. Tenemos que, por hipótesis, existe $I = \displaystyle\int_a^b f$. Ya que f es integrable, entonces f es acotada, por lo cual existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para toda $x \in [a,b]$.

Haremos la prueba como sigue: Ya que I es cota inferior de $A = \{\overline{S}(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (¿por qué?), mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{S}(f,P_{N_\varepsilon}) < I + \varepsilon$. Análogamente, como I es cota superior de $B = \{\underline{S}(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{S}(f,P_{M_\varepsilon}) > I - \varepsilon$. Es decir, mediante la caracterización del supremo y del ínfimo probaremos (1).

Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos el siguiente resultado.

Lema auxiliar. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \ge N$, entonces

$$\overline{S}(f,P_m) - \underline{S}(f,P_m) < \varepsilon.$$

Note que el lema es similar al criterio de integrabilidad, pero da una condición mucho más fuerte porque dice que a partir de cierto momento la distancia entre las sumas superior e inferior está acotada.

Procedemos a la prueba del lema. Por el criterio de integrabilidad, existe $P_0 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$\overline{S}(f,P_0) - \underline{S}(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supongamos que $P_0 = \{t_0 < \cdots < t_{n-1}\}$ es una partición con n puntos. Ahora, sea $P_m = \{t_0 < \cdots < t_m\}$ una partición homogénea en m subintervalos. Consideremos $Q = P_0 \cup P_m$. Notemos que Q tiene a lo más $n-2$ puntos adicionales que P_m (los puntos de $P_0 \setminus \{a,b\}$). Ahora, si $Q' = P_m \cup \{c\}$ con $c \in P_0 \setminus \{a,b\}$ y $t_{j-1} < c < t_j$ para algún $j \in \{1,\ldots,m\}$, entonces

$$\overline{S}(f,P_m) - \overline{S}(f,Q') = M_j(t_j - t_{j-1}) - \alpha_1(c - t_{j-1}) - \alpha_2(t_j - c)$$

donde M_j, α_1, α_2 son los supremos de los valores de f en $[t_{j-1},t_j]$, $[t_{j-1},c]$ y $[c,t_j]$, respectivamente.

Como $|M_j| \le M$, $|\alpha_1| \le M$, $|\alpha_2| \le M$ y $0 < t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{m}$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P_m) - \overline{S}(f,Q') &\le M(t_j - t_{j-1}) + M(c - t_{j-1}) + M(t_j - c) \\
&= 2M(t_j - t_{j-1}) \\
&= 2M\frac{b-a}{m}.
\end{aligned}$$

Al repetir este proceso con los demás puntos de $P_0 \setminus \{a,b\}$ hasta obtener Q, obtenemos que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P_m) - \overline{S}(f,Q) &\leq 2(n-2)M\frac{b-a}{m} \\ &< 2nM\frac{b-a}{m}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $n-2$ está contando cuántos puntos se agregaron (a lo más).

De manera totalmente análoga se obtiene que

$$\underline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,P_m) < 2nM\frac{b-a}{m}. \tag{4}$$

Ahora, como Q es un refinamiento de P_0, entonces

$$\overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P_0)$$

y

$$\underline{S}(f,P_0) \leq \underline{S}(f,Q),$$

a partir de lo cual obtenemos que

$$\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P_0) - \underline{S}(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Luego, obtenemos que

$$\overline{S}(f,P_m) < \overline{S}(f,Q) + 2nM\frac{b-a}{m} \tag{6}$$

$$< \underline{S}(f,Q) + \frac{\varepsilon}{2} + 2nM\frac{b-a}{m} \tag{7}$$

$$< \underline{S}(f,P_m) + \frac{\varepsilon}{2} + 4nM\frac{b-a}{m} \tag{8}$$

donde (6) se obtiene a partir (3), (7) se sigue de (5), y (8) se sigue de (4).

Entonces

$$\overline{S}(f,P_m) - \underline{S}(f,P_m) < \frac{\varepsilon}{2} + 4nM\frac{b-a}{m}.$$

Proponemos $\delta = \frac{\varepsilon}{8nM}$. Si P_m es una partición homogénea de $[a,b]$ tal que $t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{m} < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P_m) - \underline{S}(f,P_m) &< \frac{\varepsilon}{2} + 4nM\frac{b-a}{m} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4nM\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora, como $\frac{\delta}{b-a} > 0$, por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\delta}{b-a}$. Así,

$$\overline{S}(f,P_N) - \underline{S}(f,P_N) < \varepsilon.$$

Finalmente, observamos que si $m \geq N$, entonces $\frac{b-a}{m} \leq \frac{b-a}{N} < \delta$, así que por (9) se cumple que

$$\overline{S}(f,P_m) - \underline{S}(f,P_m) < \varepsilon.$$

Esto termina la prueba del Lema auxiliar. †

Continuemos con la prueba de la proposición. Sea $N \in \mathbb{N}$ como en el Lema auxiliar. Entonces para toda $m \geq N$ se cumple que

$$\overline{S}(f, P_m) - \underline{S}(f, P_m) < \varepsilon. \tag{10}$$

Como $\underline{S}(f, P_m) \leq I \leq \overline{S}(f, P_m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$ porque f es integrable, en particular tenemos que

$$I \in [\underline{S}(f, P_m), \overline{S}(f, P_m)]$$

para toda $m \geq N$, pero por (10), dicho intervalo tiene longitud menor a ε, así que

$$\int_a^b f - \underline{S}(f, P_m) < \varepsilon \tag{11}$$

y también

$$\overline{S}(f, P_m) - \int_a^b f < \varepsilon \tag{12}$$

para toda $m \geq N$. Esto prueba (1).

Finalmente, si ya conoce el significado de las expresiones que aparecen en (2)[1], veamos que la prueba anterior también demuestra dicha cadena de igualdades. Para demostrar la primera igualdad, tenemos que demostrar que para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$, entonces

$$\left| \underline{S}(f, P_m) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Por construcción, sabemos que $\int_a^b f \geq \underline{S}(f, P_m)$, así que

$$\left| \underline{S}(f, P_m) - \int_a^b f \right| = \int_a^b f - \underline{S}(f, P_m),$$

y obtenemos la conclusión deseada a partir de la ecuación (11).

De manera análoga, la segunda igualdad queda demostrada si probamos que para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ entonces

$$\left| \overline{S}(f, P_m) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Pero ya sabemos que por construcción se cumple que $\overline{S}(f, P_m) \geq \int_a^b f$, así que

$$\left| \overline{S}(f, P_m) - \int_a^b f \right| = \overline{S}(f, P_m) - \int_a^b f,$$

por lo cual la conclusión deseada se obtiene a partir de la ecuación (12). Esto termina la prueba. ■

[1] Si aún no lo conoce, no se preocupe, es un tema que veremos más adelante en este curso.