Ejercicios 03
Monotonía de la integral

Ejercicio 1. *Demuestre que la composición de funciones integrables no es necesariamente una función integrable.*

Demostración. Para hacer la demostración daremos dos funciones integrables tales que su composición existe, pero que dicha composición no es integrable. En primer lugar, consideremos la función de Thomae $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \operatorname{mcd}(p,q) = 1. \end{cases}$$

En el **Ejercicio 2** de la **Ayudantía 01** se demostró que esta función f es integrable sobre $[0,1]$. A continuación, consideremos la función $g : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Notamos que g es continua en $[0,1]$ salvo en 0, por lo cual g es integrable sobre $[0,1]$ (¿puede decir por qué?). Observamos que $g \circ f$ está bien definida, así que procedamos a analizar si esta composición es integrable. Por un lado, si $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, entonces $f(x) \neq 0$, por lo cual

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = 1,$$

mientras que si $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, entonces $f(x) = 0$, de donde

$$\left(g \circ f\right)(x) = g(0) = 0.$$

Por lo tanto, $g \circ f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\left(g \circ f\right)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

sin embargo, como ya se vio en el **Ejemplo 8** de la **Clase 03**, dicha función no es integrable. Esto prueba lo deseado. ∎

Lema 2. *Sea* $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función integrable sobre* $[a,b]$*. Si* $f(x) \geq 0$ *para toda* $x \in [a,b]$*, entonces*

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Demostración. Notemos que si $P_0 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces $m_j \geq 0$ pues 0 es una cota inferior de $\{f(x) \mid x \in [t_{j-1}, t_j]\}$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, ya que por hipótesis $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$, en particular, $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [t_{j-1}, t_j]$. Esto implica que

$$\underline{S}(f, P_0) = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(t_j - t_{j-1}\right) \geq 0,$$

lo cual implica que

$$\sup\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \geq 0,$$

es decir, por definición

$$\underline{\int_a^b} f \geq 0.$$

Finalmente, como f es integrable sobre $[a,b]$, por definición de integral se tiene que

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geq 0,$$

de donde se obtiene la conclusión deseada. Esto termina la prueba. ∎

Pregunta. *¿Por qué el argumento anterior NO funciona si en lugar de considerar sumas inferiores consideramos sumas superiores?*

Corolario 3 (Monotonía de la integral)**.** *Sean $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones integrables sobre $[a,b]$. Si $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Demostración. Como $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a,b]$, se sigue que $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$. Además, como f y g son integrables sobre $[a,b]$, se sigue que $f-g$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces por el Lema 2 obtenemos que

$$\int_a^b (f-g) \geq 0.$$

Ya que por las propiedades de la integral tenemos que

$$\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

se sigue que

$$\int_a^b f - \int_a^b g \geq 0,$$

de donde concluimos que

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Esto termina la prueba. ∎

Ejercicio 4. *(i). Demuestre que si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable sobre $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a,b]$, entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq \mu \leq M$ y*

$$\int_a^b f = \mu\,(b-a)$$

(ii). Demuestre que si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

(iii). Demuestre que en el inciso (ii) anterior la hipótesis de continuidad es esencial.

(iv). [Teorema del Valor Medio para Integrales] Suponga que $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R}$ son funciones tales que f es continua en $[a,b]$ y g es no negativa e integrable sobre $[a,b]$. Demuestre que existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

(v). Demuestre el resultado anterior ahora suponieno que g es integrable sobre $[a,b]$ y no positiva.

(vi). Demuestre que la condición de no negatividad (no positividad, respectivamente) de g es esencial para obtener los resultados anteriores.

Demostración. (i) Tenemos que las funciones $g,\ h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = m$ y $h(x) = M$ son funciones constantes, entonces g y h son integrables sobre $[a,b]$. Ahora, por la monotonía de la integral obtenemos que

$$m(b-a) = \int_a^b m = \int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h = \int_a^b M = M(b-a)$$

de donde se sigue que

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M,$$

por lo cual, al considerar $\mu = \frac{\int_a^b f}{b-a} \in [m, M]$ obtenemos que

$$\mu(b-a) = \int_a^b f.$$

Esto prueba lo deseado.

(ii) Como f es continua sobre $[a,b]$, existen $m = \text{mín}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ y $M = \text{máx}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, por lo cual $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a,b]$. También, la continuidad de f en $[a,b]$ implica que f es integrable sobre $[a,b]$. Entonces, por el inciso (i) anterior, existe $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\mu(b-a) = \int_a^b f.$$

Ahora, si $\mu = m$, entonces, ya que f es continua en $[a,b]$, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = m$, así basta tomar $\xi = x_0$. Análogamente, si $\mu = M$, entonces existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = M$. Para concluir el los posibles casos, supongamos que $m < \mu < M$: ya que f es continua en $[x_0, x_1]$ (o bien

$[x_1, x_0]$) y $m = f(x_0) < \mu < f(x_1) = M$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio sabemos que existe $\xi \in (x_0, x_1)$ (o bien $\xi \in (x_1, x_0)$) tal que $f(\xi) = \mu$. Así, en cualquiera de los casos obtenemos que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi)(b-a) = \mu(b-a) = \int_a^b f.$$

Esto prueba lo deseado.

(iii) Consideremos $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Notamos que f no es continua en $\frac{1}{2}$, y por lo tanto no es continua en $[0,1]$. Además, f es integrable en $[0,1]$ y de hecho

$$\int_0^1 f = \frac{1}{2}$$

(¿puede demostrar este hecho?). Por otro lado, la ecuación $f(x)(1-0) = \frac{1}{2}$ es equivalente a $x(1) = \frac{1}{2}$, que tiene como única solución a $x = \frac{1}{2}$, sin embargo, por definición de f, se tiene que $f(x) \neq \frac{1}{2}$ para toda $x \in [0,1]$. Por lo tanto, no se cumple la conclusión del inciso (ii) anterior, esto es, la hipótesis de continuidad de f en todo $[a,b]$ es esencial.

(iv) Como f es continua en $[a,b]$, existen $m = \text{mín}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ y $M = \text{máx}\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, además, ya que $g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$, entonces obtenemos

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

es decir, para toda $x \in [a,b]$ se cumple que

$$(m \cdot g)(x) \leq (f \cdot g)(x) \leq (M \cdot g)(x).$$

Ya que f y g son integrables sobre $[a,b]$, entonces se sigue que $f \cdot g$ es integrable sobre $[a,b]$, así que por la monotonía de la integral obtenemos que

$$\int_a^b (m \cdot g) \leq \int_a^b (f \cdot g) \leq \int_a^b (M \cdot g),$$

de donde por las propiedades de la integral obtenemos que

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b (f \cdot g) \leq M \int_a^b g. \tag{1}$$

A continuación, tenemos dos casos.

Caso 1: Supongamos que $\int_a^b g = 0$. Entonces

$$0 = m \cdot 0 \leq \int_a^b (f \cdot g) \leq M \cdot 0 = 0,$$

de donde

$$\int_a^b (f\cdot g) = 0,$$

y por lo tanto podemos tomar cualquier $\xi \in [a,b]$ para obtener el resultado deseado porque

$$f(\xi)\int_a^b g = f(\xi)\cdot 0 = 0 = \int_a^b (f\cdot g).$$

Caso 2: Supongamos que $\int_a^b g \neq 0$. Como $\int_a^b g \geq 0$, obtenemos que $\int_a^b g > 0$, entonces, al dividir la cadena de desigualdades 1 por dicho valor, obtenemos que

$$m \leq \frac{\int_a^b (f\cdot g)}{\int_a^b g} \leq M.$$

A partir de aquí, si $\mu = \frac{\int_a^b (f\cdot g)}{\int_a^b g}$ procedemos exactamente igual que en la prueba del inciso (ii) analizando los 3 subcasos posibles: $\mu = m$, $\mu = M$, o $m < \mu < M$. Esto termina la prueba.

(v) A partir de la hipótesis obtenemos que $-g$ es no negativa, así que el resultado se sigue inmediatamente del inciso (iv) anterior.

(vi) Notamos que si $f,\ g : [-1,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x = g(x)$, entonces f es continua en $[-1,1]$ y g es integrable sobre $[-1,1]$, pero g no es no negativa ni no positiva (toma tanto valores positivos como valores negativos). Por un lado tenemos que

$$\int_{-1}^1 fg = \int_{-1}^1 x^2 = \frac{2}{3}$$

mientras que

$$\int_{-1}^1 g = \frac{1}{2},$$

y al juntar ambos resultados obtenemos la ecuación

$$\frac{\mu}{2} = \mu\int_{-1}^1 g = \int_{-1}^1 fg = \frac{2}{3}$$

que no tiene solución en $[-1,1]$, por lo cual no se cumple la conclusión del inciso (iv) ni la conclusión del inciso (v). Esto prueba lo deseado. ■