Ayudantía 04
Sumas de Riemann

A lo largo de esta sesión consideremos una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable sobre $[a,b]$. Además, sea $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ una partición de $[a,b]$, digamos $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$. Ahora, para cada $i \in \{1, \ldots\}$, tomemos $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces claramente

$$m_i \leq f(x_i) \leq M_i,$$

lo cual implica que

$$\underline{S}(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(t_i - t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,P).$$

Definición 1. Cualquier suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

se llama **suma de Riemann** de f correspondiente a la partición P.

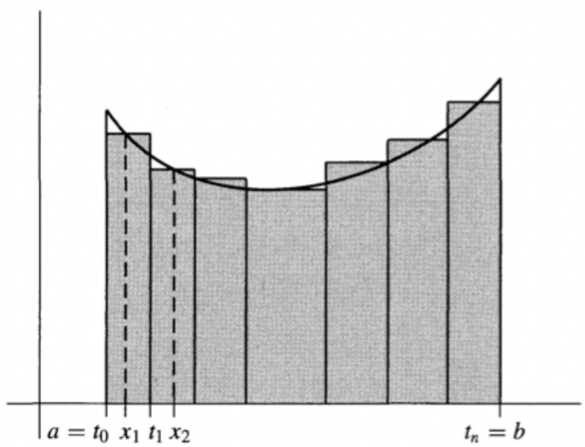

Figura 1: Ilustración de una suma de Riemann como suma de áreas de rectángulos: una parte por encima y otra por debajo de la gráfica de f.

Es importante notar que en este tipo de sumas se elige de forma arbitaria el punto x_i dentro de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, por lo cual de manera general no es posible determinar cuándo una suma de Riemann es mayor, menor o igual al valor $\int_a^b f$. Sin embargo, si las *bases* de los rectángulos son suficientemente cortas, entonces la suma de Riemann debería tener un valor muy próximo al de la integral, lo cual se justifica en el siguiente resultado.

Teorema 2. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a,b]$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $t_i - t_{i-1} < \delta$, se satisface que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann obtenida al elegir $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Demostración. Ya sabemos que para cualquier partición $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ se cumple que

$$\underline{S}(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(t_i - t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,P).$$

y también

$$\underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P),$$

por lo cual queremos demostrar que dado $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $\delta > 0$ tal que si $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ es una partición tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para toda i, entonces $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.

A partir de ahora, comencemos la prueba. Para ello, sea $\varepsilon > 0$. Ya que f es una función integrable sobre $[a,b]$, en particular es una función acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in [a,b]$. Luego, por el criterio de integrabilidad vía épsilon existe $P^* = \{u_0, \ldots, u_K\}$ partición de $[a,b]$ tal que

$$\overline{S}(f,P^*) - \underline{S}(f,P^*) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A continuación, tomemos $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4MK}.$$

Notamos que en particular, $2KM\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Veamos que dicho $\delta > 0$ funciona. Para ello, tomemos $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, definamos los siguientes conjuntos de índices:

$$I_1 = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid [t_{i-1}, t_i] \subset [u_{j-1}, u_j] \text{ para alguna } j \in \{1, \ldots, K\}\},$$

e

$$I_2 = \{1, \ldots, n\} \setminus I_1.$$

Entonces, notamos que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

Por un lado, tenemos que

$$\sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,P^*) - \underline{S}(f,P^*) < \frac{\varepsilon}{2}$$

porque $M_i \leq M_j^*$ y $m_j* \leq m_i$ pues $[t_{i-1}, t_i] \subset [u_{j-1}, u_j]$ en este caso, y la desigualdad se obtiene por la elección de P^*. Por otro lado, para $i \in I_2$ se cumple que $t_{i-1} < u_j < t_i$ para alguna $j \in \{1, \ldots, K-1\}$, por lo cual hay, a lo más, $K-1$ elementos en I_2, además, $M_i - m_i \leq 2M$ (¿puede demostrarlo?), así que

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{i \in I_2} 2M(t_i - t_{i-1}) \\ &< 2M \sum_{i \in I_2} \delta \\ &\leq (K-1)2M\delta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 2KM\delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Así, a partir de los análisis anteriores obtenemos que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de donde, como se comentó al principio de la prueba, se sigue que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Esto termina la demostración. ∎