Última actualización: 20 de septiembre de 2021

Clase 01

¿Sabe usted calcular áreas?

"Sabemos" que el "área" de un cuadrado, cuyo lado mide una unidad, la obtenemos multiplicando *lado por lado*, es decir una unidad por una unidad. Así, un cuadrado, cuyo lado mide una unidad, tiene "área" una unidad cuadrada. Ahora, esta idea se puede extender a cuadrados de lado arbitrario, digamos l, es decir, un cuadrado cuyo lado mide l unidades tiene un "área" de $l^2 = l \cdot l$ unidades cuadradas. Si ahora consideramos un rectángulo, cuya base mide x unidades y cuya altura mide y unidades, entonces su área la obtenemos multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura, es decir, xy unidades cuadradas. Una manera *geométrica* de interpretar esto es averiguar la cantidad de cuadrados de lado conocido que "caben" en dicho rectángulo y sumar las "áreas" de todos estos rectángulos, vea figura 1.

Figura 1: Para calcular el área de un rectángulo podemos "llenarlo" con cuadrados, posiblemente de distintos tamaños, y sumar las "áreas" de dichos cuadrados.

Hasta este momento todo parece claro, pero ¿qué ocurre con otro tipo de figuras? ¿cómo podemos calcular su "área"? ¿podemos calcular su "área" usando cuadrados? ¿cómo acomodamos cuadrados en figuras cuyos lados no son rectos?

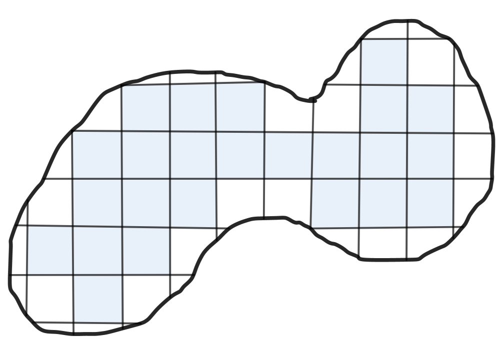
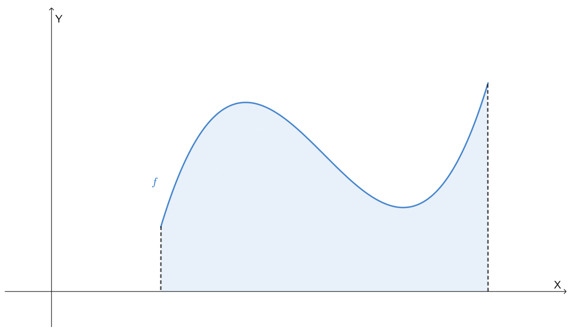
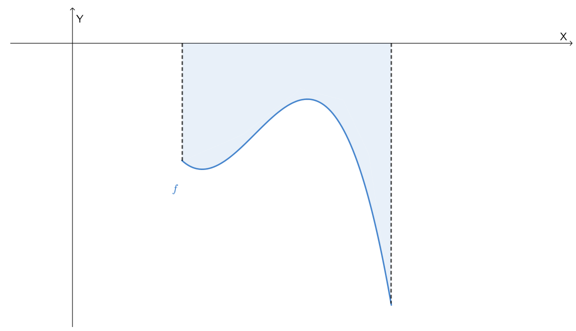


Figura 2: Cuando la figura no tiene lados rectos, ¿cómo "llenarla" con cuadrados?

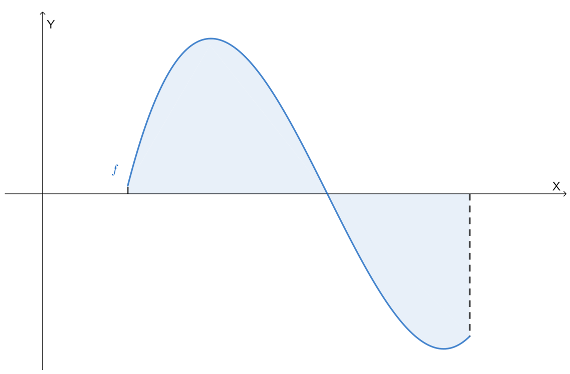
Comencemos utilizando las herramientas que ya dominamos y no consideremos cualquier figura, consideremos regiones en el plano acotadas por gráficas de funciones definidas en intervalos cerrados y rectas tanto verticales como horizontales, vea figura 3, e intentemos hallar el "área" de este tipo de regiones, claro, cuando esto tenga sentido.



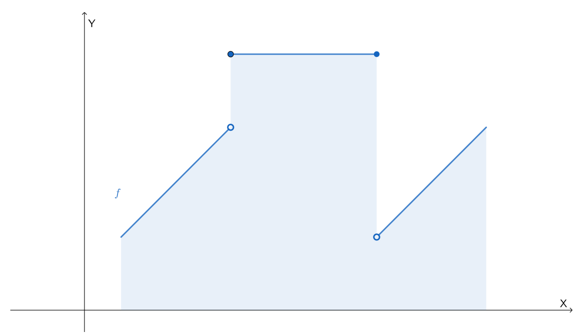
(a) La región delimitada por la gráfica de una función no negativa definida en un intervalo cerrado.



(b) La región delimitada por la gráfica de una función no positiva definida en un intervalo cerrado.



(c) La región delimitada por la gráfica de una función definida en un intervalo cerrado.



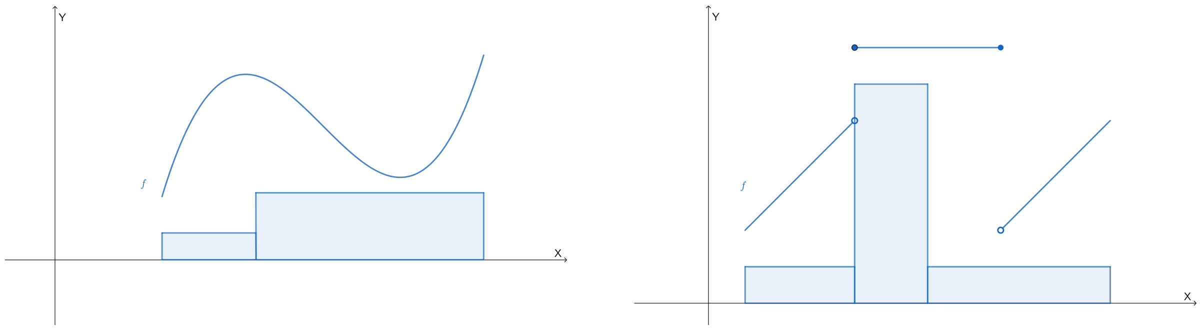
(d) La región delimitada por la gráfica de una función, no continua, definida en un intervalo cerrado.

Figura 3

Estudiemos primero regiones en el plano acotadas por gráficas de funciones no negativas definidas en un intervalo cerrado, como en la figura 3a.

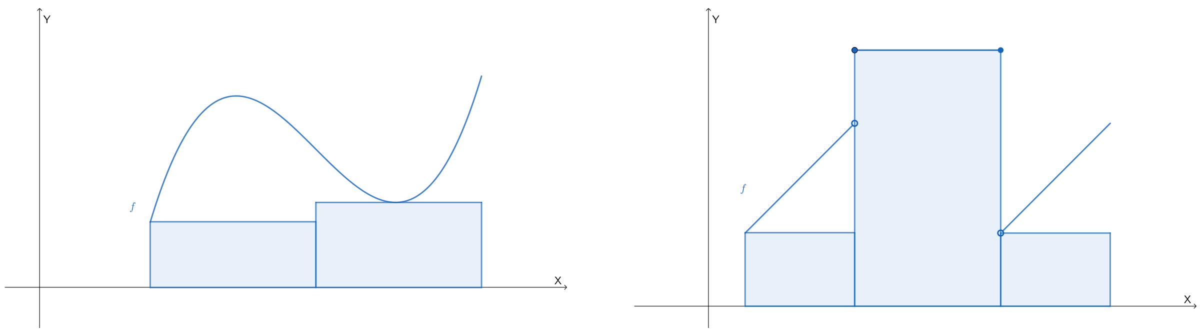
Una primera idea es averiguar qué cantidad de cuadrados, de lado conocido, caben en una región como la descrita antes y luego sumar todas sus "áreas", aunque podríamos "simplificar" un poco esto usando rectángulos, pues ya sabemos calcular el "área" de un rectángulo. Usemos entonces rectángulos e intentemos "llenar" la región con estos. Por supuesto que estos rectángulos pueden no ser de las mismas medidas.

Es casí seguro que en el primer intento la cantidad de rectángulos no sea suficiente para "llenar" la región, por ejemplo si usamos rectángulos como en la figura 4, así que, en principio, deberíamos usar rectángulos que, al menos, "toquen" la gráfica de la función, esto lo lograremos eligiendo una buena **altura**, vea figura 5.



(a) (b)

Figura 4: La altura elegida en los rectángulos no es “suficiente” para “llenar” la region bajo la gráfica de la función f.



(a) (b)

Figura 5: La altura elegida en los rectángulos es “buena”, pero aún no se logra “llenar” la region bajo la gráfica de la función f.

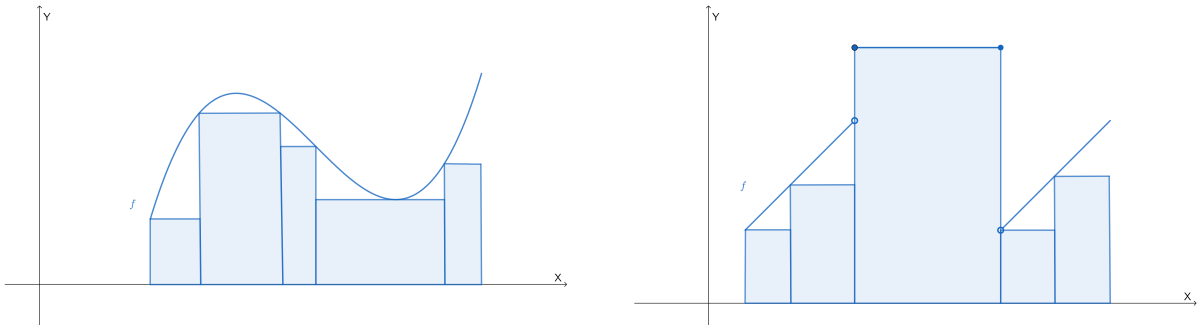
Como ya mencionamos antes, es casí seguro que con estos rectángulos no vamos a “llenar” la región, así que debemos intentarlo muchas, muchas veces, vea figura 6

Este proceso de aumentar la cantidad de rectángulos “al azar” puede no ser tan productivo, pero podemos intentar otro tipo de procedimiento. Dados unos rectángulos, como los que hemos comentado, podemos dividir la **base** de estos y cambiar la **altura** de al menos uno de los que obtenemos al dividir la **base**, vea figura 7.

La suma de las “áreas” de los rectángulos que vamos obteniendo con este proceso cada vez es mejor, pues en cada paso “llenamos” más la región. Ahora, dependiendo de la región, es posible que este proceso nunca termine, pero no nos preocupemos, aquí entra otra herramienta que ya manejamos bastante bien, **los límites**.

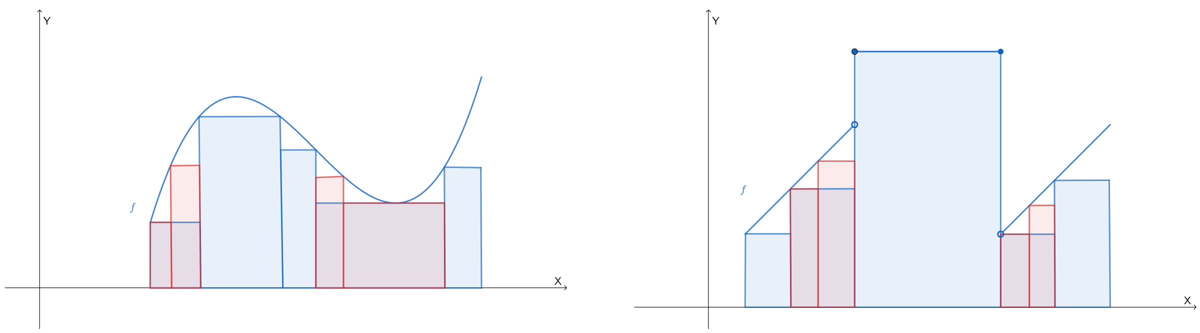
Note que todo lo que hemos comentado anteriormente puede realizarse ahora con rectángulos que “cubran” a nuestra región, es decir, “cubrir” nuestra región con unos rectángulos , luego dividirlos para obtener rectángulos que “cubran” la región, pero que en cada paso se “ajusten” mejor a la región, vea figura 8

Y, ¿por qué razón estudiariamos estos rectángulos que “exceden” a nuestra región? ¿Por qué no solo estudiar los rectángulos que están por “dentro” de nuestra región? Pues debemos esperar un poco más para dar respuesta a estas preguntas. De momento, lo que haremos ahora es comentar cómo formalizaremos toda esta discusión, en particular las las palabras en *negritas*.



(a) (b)

Figura 6: Al considerar más rectángulos estamos más “cerca” de “llenar” la región bajo la gráfica de la función f.



(a) (b)

Figura 7: Al dividir, al menos, un rectángulo y elegir “alturas” adecuadas para los nuevos rectángulos es posible que estemos más “cerca” de “llenar” la región bajo la gráfica de la función f.

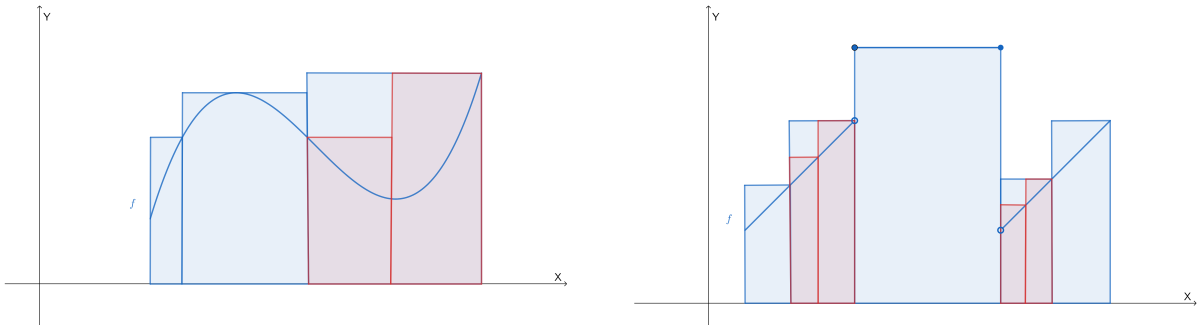
Recordemos que lo que nos interesa es hallar el “área” de una región y que haremos esto a tráves de la suma de las “áreas” de ciertos rectángulos y para ello es necesario definir, en términos formales, los rectángulos o bien sus áreas. Comencemos con las **bases** de los rectángulos. Note que para definir una de estas es suficiente con elegir los extremos de la **base**, es decir, un par de puntos en el intervalo cerrado que es el dominio de nuestra función y esto para cada rectángulo, vea figura 9. Más adelante llamaremos a las colecciones de estos puntos **particiones**.

Respecto a las **alturas** de estos rectángulos podríamos pensar, inspirados en las figuras anteriores, que están determinadas por el valor que la función le asigna a algún punto de la base, pero, ¿es esto siempre posible? Vea figura 10.

La mejor manera de determinar las **alturas** es a tráves de otro concepto que ya estudiamos en Cálculo I, el supremo de un conjunto (o bien el ínfimo de un conjunto si consideramos rectángulos que “cubren” la región).

Finalmente, para sumar las áreas de los rectángulos que ocuparemos será necesario introducir notación un tanto más practica, la notación *sigma*.

$$\sum .$$



(a) (b)

Figura 8: Todo el proceso comentado en este texto se puede llevar a cabo con rectángulos que “cubren” la región bajo la gráfica de la función f.

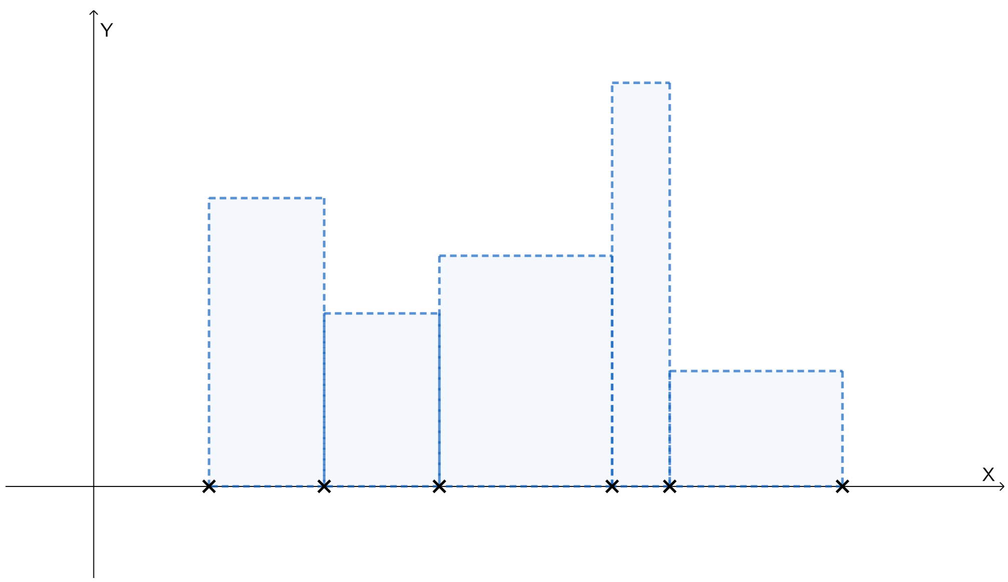
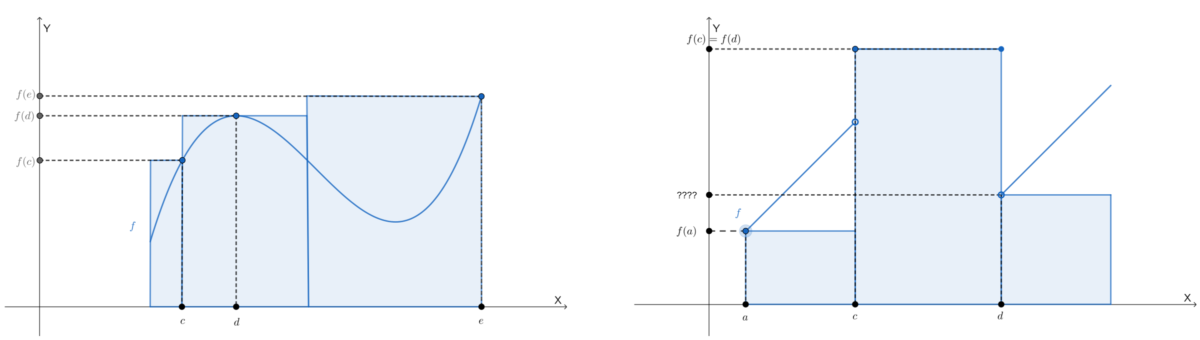


Figura 9: Las **bases** de los rectángulos quedan determinadas por puntos en el dominio de nuestra función.



(a) En ocasiones la altura de un rectángulo puede quedar determinada por el valor que la función asigna a un punto de su dominio

(b) No siempre la altura de un rectángulo está determinada por el valor que la función le asigna a un punto de su dominio.

Figura 10