Última actualización: 23 de septiembre de 2021

Clase 02

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

En esta sesión comenzaremos a formalizar los conceptos discutidos la sesión anterior, en particular el de *base del rectángulo.*

Particiones

Definición 1 *Sean $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $P \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que P es una* ***partición de*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *si P es un subconjunto finito de $[a,b]$ y $a,b \in P$.*

Observación 2 *Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y P una partición de $[a,b]$. Por definición de partición, P es un conjunto finito, por lo que existe un número natural n de tal manera que*

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\},$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

A partir de este momento, cada que consideremos una partición de un intervalo $[a,b]$, la supondremos como en la observación anterior.

Denotaremos con $\mathscr{P}_{[a,b]}$ al conjunto de todas las particiones del intervalo cerrado $[a,b]$. De esta manera, escribiremos $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ en lugar de escribir P *es una partición del intervalo* $[a,b]$.

Ejemplo 3 *Considere el intervalo cerrado $[0,1]$ y los siguientes conjuntos*

(1) $P = \{0,1\}$

(2) $Q = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(3) $R = \left\{0, \dfrac{1}{10}, \dfrac{2}{10}, ..., \dfrac{9}{10}, 1\right\}$

Indique si P, Q o R son particiones de $[0,1]$.

Solución.

(1) Claramente P es un subconjunto finito de $[0,1]$ y $0,1 \in P$. Por lo tanto $P \in \mathscr{P}_{[0,1]}$.
En general, para un intervalo $[a,b]$, llamaremos **la partición trivial de** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ a la partición que sólo tiene como elementos a a y b. De esta manera, $\mathscr{P}_{[a,b]} \neq \varnothing$ para cualquier intervalo cerrado $[a,b]$.

(2) Se tiene que $0,1 \in Q$, pero aunque Q es un subconjunto de $[0,1]$, no es finito. Por lo tanto Q NO es una partición de $[a,b]$.

(3) $0, 1 \in R$ y R es un subconjunto de $[0, 1]$ con 11 elementos, así que $R \in \mathscr{P}_{[0,1]}$.
Note que en este caso la distancia entre cualesquiera dos elementos consecutivos de R es la misma, de hecho es $1/10$. Esto se puede hacer en general, es decir, si $[a, b]$ es un intervalo cerrado, podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$P_n = \left\{ a + \frac{i(b-a)}{n} \;\middle|\; i \in \{0, 1, ..., n\} \right\}.$$

Note que P_n es un conjunto finito con exactamente $n + 1$ elementos y que

$$a = a + \frac{0(b-a)}{n} < a + \frac{1(b-a)}{n} < \cdots < a + \frac{n(b-a)}{n} = b.$$

Así, $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e induce n intervalos. A este tipo de particiones las llamaremos **particiones homogéneas.**
Observe que, en este ejemplo, $R = P_{10}$.

■

Según lo comentado la sesión anterior, necesitabamos definir de manera formal las bases de los rectángulos que utilizamos para aproximar el área bajo la gráfica de una función, pero notamos que las bases están determinadas por puntos en el intervalo dominio de la función, razón por la que hemos definido las particiones, vea figura 1.

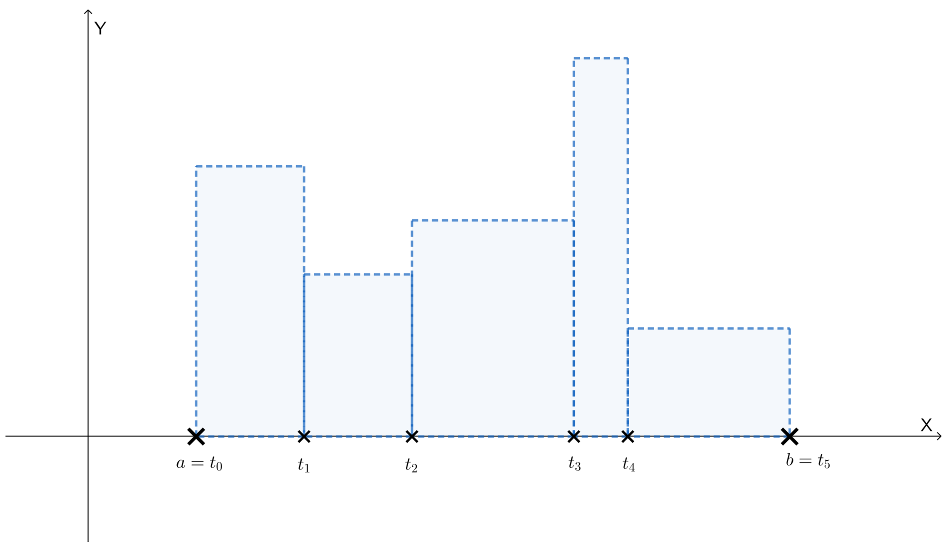

Figura 1: Las bases de los rectángulos de la imagen están determinadas por los elementos de la partición $P = \{a = t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 = b\}$.

Definición 4 *Sean $[a, b]$ un intervalo cerrado y $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Diremos que Q es un refinamiento de P, o que Q refina a P, si $P \subseteq Q$.*

Ejemplo 5 *Sea $P = \{0, 1/3, 2/3, 1\} \in \mathscr{P}_{[0,1]}$. Indique si los conjuntos $R = \{0, 1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1\}$ y $Q = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ son refinamientos de P.*

Solución. Es claro que

$$P = \{\mathbf{0}, \mathbf{1/3}, \mathbf{2/3}, \mathbf{1}\} \subseteq \{\mathbf{0}, 1/6, \mathbf{1/3}, 1/2, \mathbf{2/3}, 5/6, \mathbf{1}\} = R,$$

por lo que R es un refinamiento de P. Por otro lado,

$$P = \{\mathbf{0}, \mathbf{1/3}, \mathbf{2/3}, \mathbf{1}\} \nsubseteq \{\mathbf{0}, 1/4, 1/2, 3/4, \mathbf{1}\} = Q,$$

por lo que Q NO es un refinamiento de P.

Podemos notar algo más en este ejemplo, $P = P_3$, $Q = P_4$ y $R = P_6$, lo que muestra que, en general, no es cierto que $P_n \subseteq P_m$ cuando $n < m$. ¿Qué condición se puede pedir a los números naturales n y m para que $P_n \subseteq P_m$?

Ahora, aunque Q no refina a P, podemos construir una partición que refine a P y que contenga a Q, a saber $P \cup Q$:

$$P = \{\mathbf{0}, \mathbf{1/3}, \mathbf{2/3}, \mathbf{1}\} \subseteq \{\mathbf{0}, 1/4, \mathbf{1/3}, 1/2, \mathbf{2/3}, 3/4, \mathbf{1}\} = P \cup Q.$$

De hecho este proceso funciona en general, es decir, si $P, Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ cualesquiera, entonces $P \cup Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y refina tanto a P como a Q. ■