Última actualización: 24 de septiembre de 2021

Clase 03

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

Antes de comenzar, recordemos algunas definiciones y resultados vistos en la ayudantía "Preliminares 01": Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo (respectivamente ínfimo) de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si satisface las siguientes condiciones:

(1) $a \leq \alpha$ (respectivamente $a \geq \alpha$) para toda $a \in A$, es decir, α es cota superior (respectivamente inferior) de A.

(2) Si β es una cota superior (respectivamente inferior) de A, entonces $\alpha \leq \beta$ (respectivamente $\alpha \geq \beta$).

Dado que, de existir, tanto el supremo como el ínfimo son únicos, denotamos por $\sup \mathbf{A}$ e $\inf \mathbf{A}$ al supremo e ínfimo de A respectivamente.
También debemos recordar el **Axioma del Supremo**:
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es un conjunto no vacío y acotado superiormente, entonces existe $\sup A$.

Y que utilizando el axioma del supremo se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1 (Teorema del Ínfimo) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, entonces existe* $\inf A$.

En esta ocasión formalizaremos los conceptos de *altura* y *área del rectángulo* discutidos en la Clase 01.

Sumas Inferiores y Sumas Superiores

Con los siguientes ejemplos queremos "preparar el terreno" para mostrar cómo el supremo y el ínfimo de un conjunto nos ayudarán a definir de manera formal las alturas de los rectángulos que utilizaremos para aproximar el área bajo la gráfica de una función definida en un intervalo cerrado.

Ejemplo 2 *Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente regla de correspondencia*

$$f(x) = (x-1)^2 - 1.$$

Muestre que existen $\inf\{f(x) \mid x \in [0,2]\}$ *y* $\sup\{f(x) \mid x \in [0,2]\}$ *y hállelos.*

Solución. Llamemos A al conjunto $\{f(x) \mid x \in [0,2]\}$, es decir

$$A = \{f(x) \mid x \in [0,2]\}.$$

Entonces debemos demostrar que existen tanto el ínfimo como el supremo de A y hallarlos. Pero antes, es importante observar que el conjunto A es un subconjunto de la imagen bajo f de $\mathbb{R}$ ($A \subseteq f(\mathbb{R})$) por lo que, de existir, el ínfimo y el supremo de A son números en el codominio de f y posiblemente no tengan nada que ver con el intervalo $[0,2]$.

De nuestros cursos de Cálculo I sabemos que una función continua g sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su valor máximo, digamos M, y su valor mínimo, digamos m, y por el Teorema del

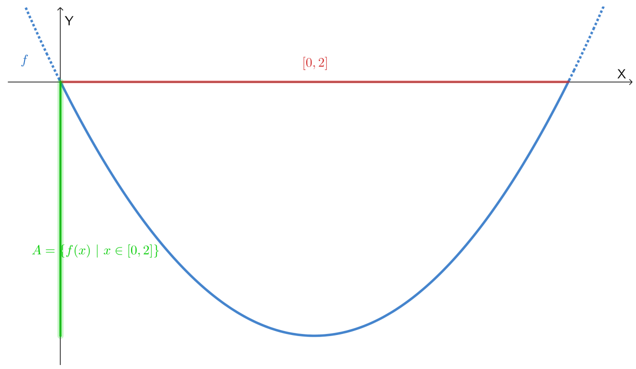


Figura 1: El conjunto A es un subconjunto del codominio de f mientras que el conjunto $[0, 2]$ es un subconjunto del dominio de f.

Valor Intermedio, que $\{g(x) \mid x \in [a, b]\} = [m, M]$. En nuestro caso, el valor mínimo de f en $[0, 2]$ es $-1 = f(1)$ y el valor máximo de f en $[0, 2]$ es $0 = f(0) = f(2)$, (vea figura 1) por lo que $A = [-1, 0]$. Luego, A es no vacío y acotado tanto superior como inferiormente, así que, por el Teorema del Ínfimo y el Axioma del Supremo, tenemos que existen tanto $\inf A$ como $\sup A$. Finalmente, basta recordar que $\inf[a, b] = a$ y $\sup[a, b] = b$, de donde $\inf A = -1$ y $\sup A = 0$. ■

Ejemplo 3 *Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cualesquiera $x, y \in [a, b]$ que cumplen que $x < y$, se tiene que $f(x) \leq f(y)$, es decir, una función no decreciente. Muestre que existen*

$$\sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

y

$$\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

y hállelos.

Solución. Claramente $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \neq \varnothing$, por ejemplo $f(a) \in \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Además, como f es no decreciente, se tiene que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Se sigue que $f(a)$ es una cota inferior, y $f(b)$ una cota superior, para el conjunto $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Luego, por el Teorema del Ínfimo y el Axioma del Supremo, existen $\inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ y $\sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

Afirmamos que $f(a) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ y $f(b) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Para demostrar esta afirmación solo resta ver que si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una cota inferior y $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, entonces $\alpha \leq f(a)$ y $f(b) \leq \beta$. Pero si α y β son cota inferior y superior respectivamente, entonces

$$\alpha \leq f(x) \qquad \text{y} \qquad f(y) \leq \beta$$

para cualesquiera $x, y \in [a, b]$, en particular ocurre para $x = a$ y $y = b$. Así, tenemos que $\alpha \leq f(a)$ y $f(b) \leq \beta$. ■

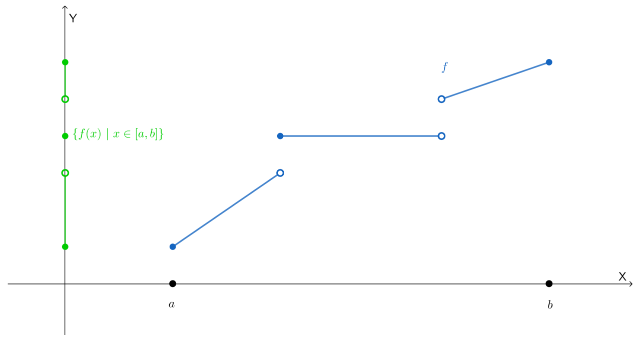


Figura 2: Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no decreciente, el conjunto $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ no necesariamente es un intervalo.

Observación 4 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$. Note que el conjunto $A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ es no vacío, por ejemplo $f(a) \in A$. Ahora, por ser f una función acotada en $[a,b]$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que*

$$-K \leq f(x) \leq K,$$

para toda $x \in [a,b]$, es decir, A es un conjunto acotado tanto superior como inferiormente. Así, por el Axioma del Supremo y el Teorema del Ínfimo, existen $M = \sup(A)$ y $m = \text{ínf}(A)$.

Además se cumple que

$$\beta \leq m \leq f(x) \leq M \leq \alpha,$$

para todo $x \in [a,b]$ y para cualesquiera β cota inferior de A y α cota superior de A.

Una interpretación geométrica de la observación anterior es que la región (la banda) que determinan las rectas $y = m$ y $y = M$ es la más angosta que contiene a todos los puntos de la gráfica de f, vea figura 3.

Note que la existencia de m y M nos permiten determinar la *altura* de un par de rectańgulos, que tienen como base el intervalo $[a,b]$; uno de ellos está contenido en la región que determina la gráfica de f mientras que el otro contiene a la región que determina la gráfica de f, vea figura 4

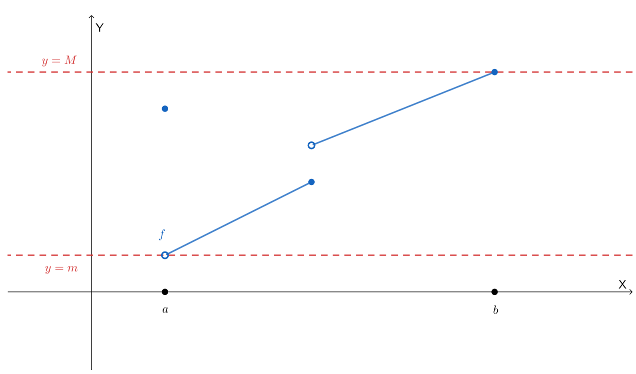
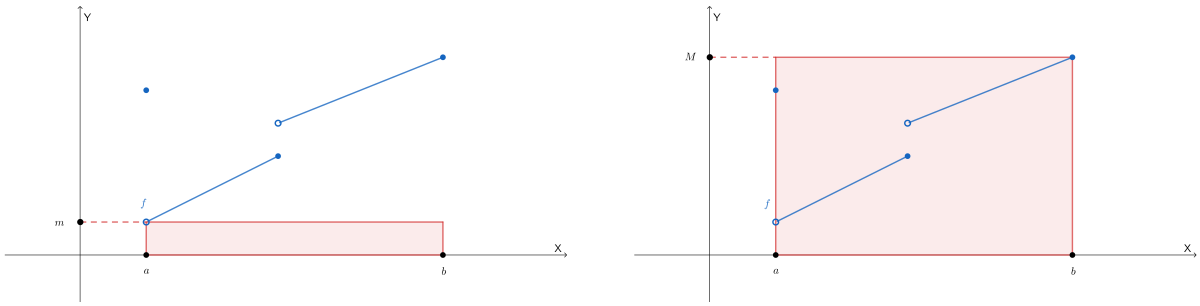


Figura 3: la "banda" que determinan las rectas $y = m$ y $y = M$ es la más angosta que contiene a todos los puntos de la gráfica de f.

¿Vieron que ya "definimos" una(s) buena(s) altura(s) para los rectángulos que nos interesan? Pero, como lo que realmente nos interesa es la suma de las áreas de los rectángulos, definiremos directamente estos números *las áreas de los rectángulos*, por supuesto, usando las *alturas* que acabamos de "hallar".



(a) El número m determina la altura de un rectángulo que queda contenido en la región que determina la gráfica de f.

(b) El número M determina la altura de un rectángulo que contiene la región que determina la gráfica de f.

Figura 4

Definición 5 *Sean* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$*,* $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ *y* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada. Para cada* $i \in \{1, ..., n\}$ *sean*

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \qquad y \qquad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

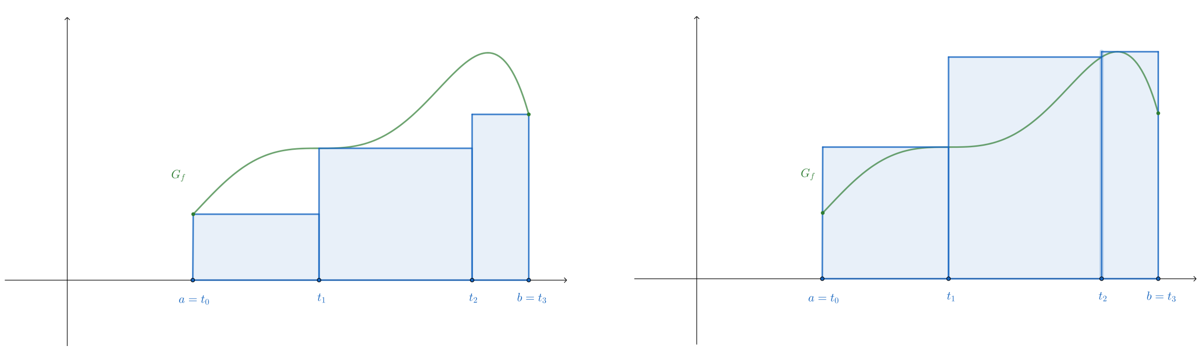
Definimos la ***la suma inferior de*** f ***respecto a*** P*, denotada por* $\underline{S}(f, P)$*, como*

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

y ***la suma superior de*** f ***respecto a*** P*, denotada por* $\overline{S}(f, P)$*, como*

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

vea figura 5.



(a) $\underline{S}(f, P)$ se puede interpretar como el área de los rectángulos por “debajo” de la gráfica de f.

(b) $\overline{S}(f, P)$ se puede interpretar como el área de los rectángulos por “encima” de la gráfica de f.

Figura 5

En la definición anterior se pide que f sea acotada en $[a, b]$ para garantizar la existencia tanto del ínfimo como del supremo de cada uno de los conjuntos $\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, como vimos en la Observación 4.

Observación 6 *Sean $[a,b]$ un intervalo y $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Por definición de m_i y M_i, se tiene que $m_i \leq M_i$ y de aquí que*

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P).$$

Ejemplo 7 *Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo. Considere la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ y $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Halle $\underline{S}(f,P)$ y $\overline{S}(f,P)$.*

Solución. Supongamos que $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Note que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \{c\}.$$

De donde $m_i = c$ y $M_i = c$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto,

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b-a)$$

y

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

■

Ejemplo 8 *Considere la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

y $P \in \mathscr{P}_{[0,1]}$. Halle $\underline{S}(f,P)$ y $\overline{S}(f,P)$.

Solución. Supongamos que $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, con $n \in \mathbb{N}$. Recordemos, de Cálculo I, que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, entonces existen $q \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $q, r \in (a,b)$. Así, para cada $i \in \{1, ...n\}$, tenemos que existen $q_i \in \mathbb{Q}$ y $r_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $q_i, r_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Note que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $f(q_i) = 0$ y $f(r_i) = 1$. Se sigue que

$$\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} = \{0, 1\}.$$

Luego, $m_i = 0$ y $M_i = 1$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto,

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0(t_i - t_{i-1}) = 0$$

y

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1(t_i - t_{i-1}) = 1.$$

■

Es importante recalcar que en los dos ejemplos anteriores las particiones utilizadas son arbitrarias, no tienen nada en particular.