

Clase 04

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

Como es costumbre, iniciamos recordando algunas cosas vistas en la sesión pasada, en este caso la definición de suma inferior y suma superior:

Definición 1 Sean $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $P = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sean

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad y \quad M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definimos la **la suma inferior de f respecto a P** , denotada por $\underline{S}(f, P)$, como

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

y la **suma superior de f respecto a P** , denotada por $\overline{S}(f, P)$, como

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Además de la siguiente observación:

Observación 2 Sean $[a, b]$ un intervalo y $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Por definición de m_i y M_i , se tiene que $m_i \leq M_i$ y de aquí que

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P).$$

En esta ocasión formalizaremos los conceptos de *altura* y *área del rectángulo* discutidos en la Clase 01.

Funciones Integrables

Lema 3 Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tales que Q es un refinamiento de P . Entonces

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \quad y \quad \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P).$$

Demostración. Mostraremos únicamente la desigualdad entre las sumas inferiores, pues la otra es totalmente simétrica, y haremos la demostración usando inducción matemática sobre el cardinal del conjunto $Q \setminus P$.

Comencemos con nuestra base de inducción, para ello supongamos que $Q, P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tales que Q refina a P y que el cardinal de $Q \setminus P$ es exactamente 1, es decir, $|Q \setminus P| = 1$. Entonces, podemos suponer que

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n\} \quad y \quad Q = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, l, t_k, \dots, t_n\}.$$

Luego, tenemos que

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Por otro lado, si definimos

$$m' = \inf \{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, l]\} \quad y \quad m'' = \inf \{f(x) \mid x \in [l, t_k]\},$$

se tiene que

$$m_k \leq m', m'',$$

pues $\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, l]\}, \{f(x) \mid x \in [l, t_k]\} \subseteq \{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, t_k]\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - l) + m_k(l - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m''(t_k - l) + m'(l - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \underline{S}(f, Q). \end{aligned}$$

Es decir, si Q refina a P y solo difieren en un punto, se cumple que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q).$$

Ahora, supongamos que para cualesquiera $R, T \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ que cumplan que T refina a R y que $|T \setminus R| = m$, se tiene que

$$\underline{S}(f, R) \leq \underline{S}(f, T).$$

Luego, sean $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tales que Q refina a P y $|Q \setminus P| = m + 1$. Entonces podemos suponer que $Q \setminus P = \{l_1, \dots, l_m, l_{m+1}\}$. Consideremos la partición del intervalo $[a, b]$, P' , definida como sigue

$$P' = P \cup \{l_1, \dots, l_m\}.$$

Note que Q refina a P' y que $|Q \setminus P'| = 1$, así que, por la base de inducción, se tiene que

$$\underline{S}(f, P') \leq \underline{S}(f, Q).$$

Por otro lado, P' refina a P y $|P' \setminus P| = m$, así que por hipótesis de inducción tenemos que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P').$$

Por lo que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P') \leq \underline{S}(f, Q).$$

■

Como consecuencia del Lema 3 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4 Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Entonces

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q).$$

Demostración. Sea T la partición del intervalo $[a, b]$ definida como

$$T = P \cup Q.$$

Note que T refina a P y también refina a Q , así que por el Lema 3 y la Observación 2, tenemos que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, T) \leq \overline{S}(f, T) \leq \overline{S}(f, Q).$$

■

Recordemos que dado un intervalo $[a, b]$ siempre podemos considerar la partición trivial $\{a, b\}$, por lo que $\mathcal{P}_{[a,b]} \neq \emptyset$. De esto se sigue que, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada,

$$\{\underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \{\overline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} \neq \emptyset.$$

Ahora, utilizando la partición trivial del intervalo $[a, b]$ y el Teorema 4 tenemos que el conjunto $\{\underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$ es acotado superiormente por $\overline{S}(f, \{a, b\})$ y el conjunto $\{\overline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$ es acotado inferiormente por $\underline{S}(f, \{a, b\})$. Así, por el Axioma del supremo y el Teorema del Ínfimo, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 5 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos

la *integral inferior de f en $[a, b]$* , denotada por $\int_a^b f$, como

$$\int_a^b f = \sup \{ \underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \}$$

y la *integral superior de f en $[a, b]$* , denotada por $\int_a^b f$, como

$$\int_a^b f = \inf \{ \overline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \}.$$

Observación 6 Como vimos antes, para una función acotada en un intervalo cerrado, la integral inferior y la integral superior siempre existen, más aún, por el Teorema 4, tenemos que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f.$$

Ejemplo 7 Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo. Considere la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$.

Halle $\int_a^b f$ y $\int_a^b f$.

Solución. Note que la función en cuestión es la misma que la del Ejemplo 7 de la Clase 03, por lo que

$$\int_{\underline{a}}^b f = \sup \{ \underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \} = \sup \{ c(b-a) \} = c(b-a)$$

y

$$\int_a^{\overline{b}} f = \inf \{ \overline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \} = \inf \{ c(b-a) \} = c(b-a).$$

En este caso, se tiene que

$$\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\overline{b}} f = c(b-a).$$

■

Ejemplo 8 Considere la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Halle $\int_{\underline{0}}^1 f$ y $\int_0^{\overline{1}} f$.

Solución. La función de este ejemplo es la misma que la del Ejemplo 8 de la Clase 03, por lo que

$$\int_{\underline{0}}^1 f = \sup \{ \underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[0,1]} \} = \sup \{ 0 \} = 0$$

y

$$\int_0^{\overline{1}} f = \inf \{ \overline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}_{[0,1]} \} = \inf \{ 1 \} = 1.$$

En este caso, se tiene que

$$\int_{\underline{0}}^1 f < \int_0^{\overline{1}} f.$$

■

Como muestran los ejemplos anteriores, hay funciones tales que la integral inferior es menor a la integral superior y otras donde se cumple la igualdad. A estas últimas, donde se cumple la igualdad, las destacamos en la siguiente definición.

Definición 9 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es **integrable sobre** $[a, b]$ si

$$\int_{\underline{a}}^b f = \int_a^{\overline{b}} f.$$

En este caso a este número común lo llamaremos **la integral de f sobre $[a, b]$** y lo denotaremos por

$$\int_a^b f \quad \text{o bien por} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Es preciso aclarar que en la segunda notación, la letra x no tiene un significado especial, bien pudimos escribir $\int_a^b f(t) dt$ o $\int_a^b f(\alpha) d\alpha$. Respecto al símbolo dx esperaremos un poco más para dar una interpretación de este.

Como primer ejemplo de una función integrable tenemos a la función del Ejemplo 7, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ (que claramente es acotada), más aún

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

Y como ejemplo de una función no integrable (aunque también acotada) tenemos a la función del Ejemplo 8, pues