Última actualización: 28 de septiembre de 2021

Clase 05

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

Recordemos la última definición vista en la Clase 04:

Definición 1 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f* ***es integrable sobre*** *$[a,b]$ si*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En este caso a este número común lo llamaremos ***la integral de f sobre*** *$[a,b]$ y lo denotaremos por*

$$\int_a^b f \qquad \text{o bien por} \qquad \int_a^b f(x)\ dx.$$

Hasta el momento la única forma de verificar si una función es integrable es calculando un supremo (la integral inferior) y un ínfimo (la integral superior), pero esto puede no ser muy practico. Afortunadamente, en esta sesión, enunciaremos y demostraremos un criterio que nos permitirá decidir si una función es integrable, o no, de manera más sencilla.

Criterio de Integrabilidad

Teorema 2 (Criterio de integrabilidad vía *épsilon*) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que*

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos primero que f es integrable en $[a,b]$ y sea $\varepsilon > 0$. Como la integral inferior de f es un supremo y la integral superior de f es un ínfimo, podemos utilizar el Lema 10 y el Lema 13 de los Preliminares 01, respectivamente. Así, para el número positivo $\varepsilon/2$ existen $Q, R \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tales que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,Q) \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,R) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, si definimos $P = Q \cup R$, se tiene que $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y refina tanto a Q como a R. Así, por el Lema 3 de la Clase 04, tenemos que

$$\underline{S}(f,Q) \leq \underline{S}(f,P) \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,R).$$

Se sigue que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f,P) \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,P) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

y de aquí que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Pero, por ser f integrable, $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, así que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Ahora, supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$ y mostremos que f es integrable, es decir, que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

Sabemos, por la Observación 6 de la Clase 04, que $\overline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^b} f$, así que

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \geq 0.$$

Entonces, por el Lema 16 de los Preliminares 01, basta ver que para cada $\varepsilon > 0$,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon,$$

pero por definición de integral superior y de integral inferior se tiene que

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,P) \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b} f \geq \underline{S}(f,P).$$

Se sigue que

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

Luego, $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, es decir, f es integrable. $\blacksquare$

Lo importante de este teorema es que en vez de hallar la integral inferior (un supremo) y la integral superior (un ínfimo) y compararlos, solo debemos hallar, para cada $\varepsilon > 0$, UNA partición que cumpla la condición enunciada. Ilustraremos este hecho con un par de ejemplos.

Ejemplo 3 *Sean* $[a,b]$ *un intervalo cerrado,* $d \in (a,b)$*,* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *distintos y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & si\ x \in [a,d] \\ c_2 & si\ x \in (d,b]. \end{cases}$$

Muestre que f *es integrable sobre* $[a,b]$.

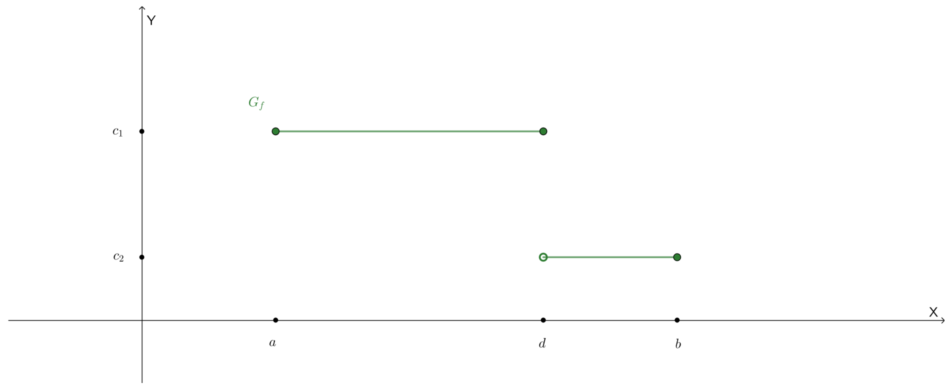


Figura 1: Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c_1 > c_2$.

Solución. Primero note que si definimos $M = \max\{|c_1|, |c_2|\}$, entonces

$$|f(x)| \leq M$$

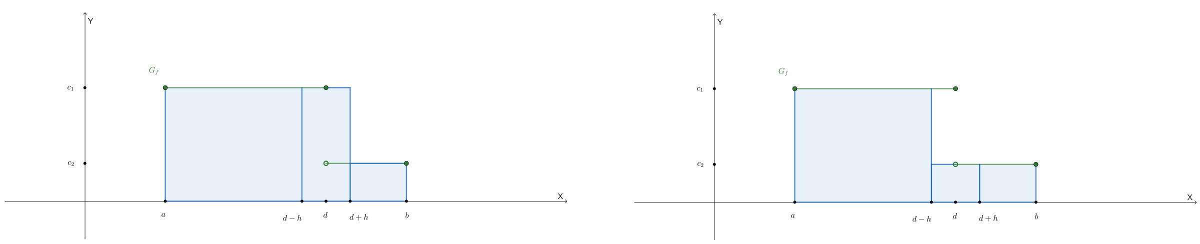
para todo $x \in [a, b]$. Es decir, f es acotada en $[a, b]$ (primer requisito para que f sea integrable). Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $c_1 > c_2$ (vea figura 1) y sea $\varepsilon > 0$.

Como ya comentamos antes, debemos "construir" una partición P de $[a, b]$ de tal manera que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

Para ello, notemos que f es "constante a pedazos", por lo que el "problema" lo tenemos justo en d. Consideremos entonces $h > 0$ de tal manera que $d - h, d + h \in (a, b)$ (seguramente no será la única condición que le pediremos) y consideremos el conjunto

$$P = \{a, d - h, d + h, b\}.$$



(a) $\overline{S}(f, P)$

(b) $\underline{S}(f, P)$

Figura 2

Claramente $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y

$$\overline{S}(f, P) = c_1 \left[(d - h) - a\right] + 2hc_1 + c_2 \left[b - (d + h)\right]$$

y

$$\underline{S}(f, P) = c_1 \left[(d - h) - a\right] + 2hc_2 + c_2 \left[b - (d + h)\right].$$

De donde

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = 2hc_1 - 2hc_2 = 2h(c_1 - c_2).$$

Así, para que P cumpla la condición del Teorema 2, solo necesitamos que $2h(c_1 - c_2) < \varepsilon$, es decir que

$$h < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c_2)}.$$

Por lo tanto, si $P = \{a, d-h, d+h, b\}$ con $h > 0$ tal que $d-h, d+h \in (a,b)$ y $h < \dfrac{\varepsilon}{2(c_1 - c_2)}$, entonces

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Note que para cada $\varepsilon > 0$ hemos exhibido una partición como la requerida en el Teorema 2, así que podemos concluir que f es integrable en $[a,b]$. ■

Ejemplo 4 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente. Demuestre que f es integrable en $[a,b]$.*

Solución. Note que f es acotada, pues al ser no decreciente se satisface

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

para todo $x \in [a,b]$. Ahora, si $f(a) = f(b)$, entonces f es la función constante $f(a)$ y ya vimos que estas funciones son integrables. Supongamos entonces que $f(a) \neq f(b)$.
Para continuar, analicemos para $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ arbitraria, la diferencia

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P).$$

Por el Ejemplo 3 de la Clase 03, tenemos que

$$m_i = f(t_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad M_i = f(t_i).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right)(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Ahora, si suponemos que P cumple que

$$t_i - t_{i-1} < \delta$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$, donde δ es un número real positivo, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right)(t_i - t_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right)\delta \\
&= \delta \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right) \\
&= \delta \left(f(b) - f(a)\right).
\end{aligned}$$

Entonces, si queremos que para $\varepsilon > 0$ se cumpla la condición del Teorema 2, bastaría con elegir una partición que cumpla que

$$t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. ■

Ejemplo 5 *Considere la función* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

(Vea figura 3). Note que dicha función tiene una infinidad de discontinuidades, pero es no decreciente, así que, por el ejemplo anterior, ES INTEGRABLE.

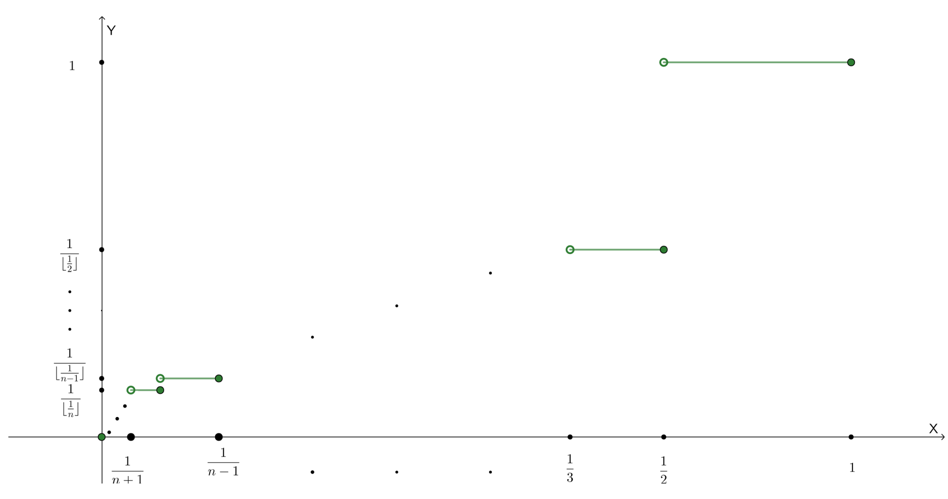


Figura 3

Como ya hemos visto, el Teorema 2 resulta muy importante para demostrar que una función es integrable, pero por desgracia no nos proporciona información acerca del valor de la integral de la función (¿imagina el valor de la integral del ejemplo 5?). En el siguiente ejemplo mostraremos, utilizando dicho teorema, que una función es integrable y además hallaremos el valor de la integral, pero para esto utilizaremos el siguiente resultado que demostrarán en la ayudantía.

Proposición 6 *Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $\{P_n\}$ la sucesión de particiones homogéneas del intervalo $[a,b]$. Entonces*

$$\sup\left\{\underline{S}(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \int_a^b f = \text{ínf}\left\{\overline{S}(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Ejemplo 7 *Sean $0 < b$ y $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = x.$$

Muestre que f es integrable en $[0,b]$ y halle el valor de dicha integral.

Solución. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y $P_n \in \mathscr{P}_{[0,b]}$ la partición homogenea de $n+1$ elementos, es decir

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, ..., \frac{(n-1)b}{n}, b\right\}.$$

Note que, para esta partición,

$$m_i = \text{ínf}\left\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\right\} = \text{ínf}\left\{x \;\middle|\; x \in \left[\frac{(i-1)b}{n}, \frac{ib}{n}\right]\right\} = \frac{(i-1)b}{n}$$

y

$$M_i = \sup\left\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\right\} = \sup\left\{x \;\middle|\; x \in \left[\frac{(i-1)b}{n}, \frac{ib}{n}\right]\right\} = \frac{ib}{n},$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Así que

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)b}{n}\left(\frac{ib}{n} - \frac{(i-1)b}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)b^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\
&= \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{b^2(n-1)}{2n}
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n}\left(\frac{ib}{n} - \frac{(i-1)b}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{ib^2}{n^2} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{b^2(n+1)}{2n}.
\end{aligned}
$$

Y de aquí que

$$
\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \frac{b^2(n+1)}{2n} - \frac{b^2(n-1)}{2n} = \frac{b^2}{n}.
$$

Ahora, por la propiedad Arquimediana, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\frac{b^2}{n_\varepsilon} < \varepsilon.
$$

Se sigue que,

$$
\overline{S}(f, P_{n_\varepsilon}) - \underline{S}(f, P_{n_\varepsilon}) = \frac{b^2}{n_\varepsilon} < \varepsilon.
$$

Así, por el Teorema 2, f es integrable en $[0, b]$, luego, por la Proposición 6, tenemos que

$$
\int_0^b f = \inf\left\{\overline{S}(f, P_n) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \inf\left\{\frac{b^2(n+1)}{2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{b^2}{2}.
$$

■

Note que en el ejemplo anterior pudimos usar el Ejemplo 4 para concluir que f es integrable, pero sin la Proposición 6 no obtendríamos el valor de la integral.

De la misma manera que el ejercicio anterior se puede demostrar que si $a < 0$ y $f : [a,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$, entonces f es integrable en $[a, 0]$ y

$$
\int_a^0 f = -\frac{a^2}{2}.
$$