*Última actualización: 1 de octubre de 2021*

# Clase 06

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

La sesión anterior enunciamos y demostramos un teorema que nos permite decidir/demostrar de manera más sencilla cuándo una función es integrable:

**Teorema 1 (Criterio de integrabilidad vía *épsilon*)** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. $f$ es integrable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que*

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

## Muchos ejemplos de funciones integrables

Hemos visto ya algunos ejemplos de funciones integrables, pero en esta ocasión ampliaremos enormemente la cantidad de ejemplos. Para ello debemos recordar la definición de continuidad en un punto y la de continuidad en un intervalo. Además, debemos dar una definición y enunciar un Teorema que no *se ve* en todos los cursos de Cálculo I.

**Definición 2** *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Diremos que $f$ es continua en $c$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ que cumple que $|x - c| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Y diremos que $f$ es continua en $I$ si $f$ es continua en cada $c \in I$.*

A continuación damos la definición de continuidad uniforme.

**Definición 3** *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que $f$ es **uniformemente continua** en $I$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in I$ que cumplan que $|x - y| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Note que la diferencia entre una función continua en un intervalo y una función uniformemente continua es el hecho de que, dado $\varepsilon > 0$, la $\delta > 0$ que existe en el primer caso depende de $\varepsilon$, pero también del punto donde estamos verificando la continuidad ($\delta(\varepsilon, c)$), es decir, la delta que funciona en un punto puede no funcionar para otro punto. Ahora, en el segundo caso, la $\delta > 0$ que existe solo depende de $\varepsilon$ ($\delta(\varepsilon)$).

Observe también que, si una función es uniformemente continua en un intervalo $I$, entonces es continua en el intervalo $I$. Y aunque el "regreso" en general no es cierto, para intervalos cerrados sí lo es y justo esto es lo que afirma el siguiente teorema.

**Teorema 4** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f$ es continua en $[a, b]$, entonces $f$ es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Por cuestiones de tiempo no proporcionaremos la demostración de este resultado, pero lo invitamos a revisarlo en el libro base del curso (Spivak). Ahora sí, con el siguiente teorema, obtendremos muchos ejemplos.

**Teorema 5** *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f$ es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.*

**Demostración.** Primero note que, como $f$ es continua en $[a, b]$, entonces $f$ es acotada en $[a, b]$. Ahora, usaremos el Teorema 1 para demostrar que $f$ es integrable en $[a, b]$. Consideremos entonces $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, luego

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Ahora, si suponemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $M_i - m_i < k$, donde $k$ es una constante positiva, entonces

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} k(t_i - t_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = k(b - a).$$

De manera que, si queremos que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$, para un $\varepsilon > 0$ dado, $P$ debería cumplir que $M_i - m_i < \varepsilon/(b - a)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Pero note que, por el Teorema 4, $f$ es uniformemente continua en $[a, b]$, por lo que, para el número positivo $\varepsilon/(b - a)$, existe $\delta > 0$ de tal manera que para cualesquiera $x, y \in [a, b]$ que cumplan que $|x - y| < \delta$, se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b - a).}$$

Así, si $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ es tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)},$$

para cada $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Luego, como $f$ es continua en $[a, b]$, lo es en cada intervalo de la forma $[t_{i-1}, t_i]$. Por lo tanto, $f$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre $[t_{i-1}, t_i]$, es decir, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existen $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ de tal manera que

$$f(x_i) \leq f(x) \leq f(y_i),$$

para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$. De hecho, $M_i = f(y_i)$ y $m_i = f(x_i)$, y como $x_i, y_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces

$$M_i - m_i = f(y_i) - f(x_i) = |f(y_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{(b - a)}.$$

Así, para esta partición $P$, se tiene que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{b - a}\right)(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.$$

Y como lo anterior vale para todo $\varepsilon > 0$, concluimos, por el Teorema 1, que $f$ es integrable. ■

Dado que conocemos muchas funciones continuas en intervalos cerrados, entonces conocemos muchas funciones integrables. Por otro lado, una pregunta natural es si el "regreso" de este teorema vale, es decir, si $f$ es una función integrable en un intervalo $[a, b]$, entonces ¿es continua en $[a, b]$? Y la respuesta es NO, basta ver los Ejemplos 3 y 5 de la Clase 05.

Continuamos este texto con el siguiente teorema.

**Teorema 6** *Sean $a < c < b$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. $f$ es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. En este caso*

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

**Demostración.** Supongamos primero que $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y demostremos que $f$ es integrable en $[a,b]$.
Sea $\varepsilon > 0$. Se tiene que existen $P' \in \mathscr{P}_{[a,c]}$ y $P''\mathscr{P}_{[c,b]}$ tales que

$$\overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P') < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,P'') - \underline{S}(f,P'') < \frac{\varepsilon}{2},$$

pues $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Luego, tenemos que $P = P' \cup P'' \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \left[\overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P')\right] + \left[\overline{S}(f,P'') - \underline{S}(f,P'')\right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como lo anterior fue para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos que $f$ es integrable en $[a,b]$.

Ahora, supongamos que $f$ es integrable en $[a,b]$. Así, para $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $P = \{t_0, ..., t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Tenemos dos casos, $c \in P$ o $c \notin P$.

(1) Si $c \in P$, tenemos que $c = t_j$ para algún $j \in \{1, ..., n-1\}$. Así que, si definimos $P'$ y $P''$ como

$$P' = \{t_0, ..., t_j\} \quad \text{y} \quad P'' = \{t_j, ..., t_n\},$$

entonces $P' \in \mathscr{P}_{[a,c]}$ y $P'' \in \mathscr{P}_{[c,b]}$. Además

$$\overline{S}(f,P) = \overline{S}(f,P') + \overline{S}(f,P'') \tag{1}$$

y

$$\underline{S}(f,P) = \underline{S}(f,P') + \underline{S}(f,P''). \tag{2}$$

Luego,

$$\left[\overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P')\right] + \left[\overline{S}(f,P'') - \underline{S}(f,P'')\right] = \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Y como $\left[\overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P')\right], \ \left[\overline{S}(f,P'') - \underline{S}(f,P'')\right] \geq 0$, entonces

$$\overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P') < \varepsilon \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,P'') - \underline{S}(f,P'') < \varepsilon.$$

(2) Si $c \notin P$, tenemos que $t_{j-1} < c < t_j$ para algún $j \in \{1, ..., n\}$. Consideremos entonces el conjunto

$$Q = \{t_0, ..., t_{j-1}, c, t_j, ..., t_n\}.$$

Se tiene que $Q \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y refina a $P$, así que, por el Lema 3 de la Clase 04, tenemos que

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f,Q).$$

Note además que la partición $Q$ es una partición como la del primer caso, es decir, $c \in Q$, así que $Q = Q' \cup Q''$, donde $Q' \in \mathscr{P}_{[a,c]}$ y $Q'' \in \mathscr{P}_{[c,b]}$ y

$$\underline{S}(f,Q) = \underline{S}(f,Q') + \underline{S}(f,Q'') \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,Q) = \overline{S}(f,Q') + \overline{S}(f,Q'').$$

Luego,

$$\left[\overline{S}(f,Q') - \underline{S}(f,Q')\right] + \left[\overline{S}(f,Q'') - \underline{S}(f,Q'')\right] = \overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Y de aquí que

$$\overline{S}(f,Q') - \underline{S}(f,Q') < \varepsilon \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,Q'') - \underline{S}(f,Q'') < \varepsilon.$$

De los dos casos, se tiene que $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$.

Ahora, para demostrar la igualdad entre las integrales, mostraremos primero que el número

$$\int_a^c f + \int_c^b f$$

es cota superior de $\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ y cota inferior de $\left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$. Consideremos entonces $P \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ y supongamos que $c \in P$ (si esto no fuese así, trabajamos de manera similar al caso 2). Como vimos en el caso (1), podemos dividir a $P$ en dos particiones $P' \in \mathscr{P}_{[a,c]}$ y $P'' \in \mathscr{P}_{[c,b]}$ de tal manera que se satisfacen las ecuaciones (1) y (2).

Ahora, como

$$\underline{S}(f,P') \leq \int_a^c f \leq \overline{S}(f,P') \quad \text{y} \quad \underline{S}(f,P'') \leq \int_c^b f \leq \overline{S}(f,P''),$$

entonces

$$\underline{S}(f,P) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{S}(f,P).$$

Es decir, el número $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f$ es cota superior de $\left\{\underline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ y cota inferior de $\left\{\overline{S}(f,P) \mid P \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$. Como $f$ es integrable

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

Es decir,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$\blacksquare$

**Ejemplo 7** *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por*

$$f(x) = x.$$

*Muestra que* $f$ *es integrable sobre* $[a,b]$ *y encuentra el valor de* $\displaystyle\int_a^b f$.

**Solución.** Mostraremos solo el caso en que $a < 0 < b$ (¿qué otros casos hay?). Por el Ejemplo 7 y la observación hecha después de éste en la Clase 05, tenemos que $f$ es integrable en $[a,0]$ y en $[0,b]$, además

$$\int_a^0 f = -\frac{a^2}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_0^b f = \frac{b^2}{2}.$$

Ahora, por el Teorema anterior, tenemos que $f$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^0 f + \int_0^b f = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

En los casos restantes, aplicando también el Teorema 6, de manera adecuada, obtenemos que

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

■

La conclusión del ejercicio anterior es que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$, entonces

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Pero toda la frase anterior se puede resumir con la siguiente notación

$$\int_a^b x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

De manera similar podemos, con esta notación, indicar lo que ya vimos antes, que una función constante es integrable y que

$$\int_a^b c \, dx = c(b-a).$$