# Preliminares 01
# Conjuntos acotados y axioma del supremo

En esta sesión recordaremos algunos conceptos de Cálculo I: en primer lugar veremos qué es un conjunto acotado y posteriormente definiremos los conceptos de cotas superior e inferior, los cuales nos permitirán definir el supremo y el ínfimo, así como establecer el axioma de completez de los números reales: **el axioma del supremo**.

## Conjuntos acotados y axioma del supremo

**Definición 1.** Sea $A \subset \mathbb{R}$.

(i). Decimos que $A$ está (o es) *acotado superiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in A$ se cumple que $x \leq M$. En este caso, $M$ es una *cota superior* de $A$.

(ii). Decimos que $A$ está (o es) *acotado inferiormente* si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in A$ se satisface que $x \geq m$. En este caso, $m$ es una *cota inferior* de $A$.

(iii). Decimos que $A$ es un *conjunto acotado* si $A$ es acotado superior e inferiormente.

**Ejemplo 2.** (i). $\varnothing$ es un conjunto acotado.

(ii). $\mathbb{R}$ no es acotado, de hecho, no es acotado inferiormente ni superiormente.

(iii). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ fijos. Se cumple que

(a) $A = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ es acotado.

(b) $B = [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ es acotado inferiormente, pero no es acotado superiormente.

(c) $C = (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ es acotado superiormente, pero no es acotado inferiormente.

*Demostración.* (i) Sea $m \in \mathbb{R}$. Veamos que $m$ es una cota superior de $\varnothing$: por contradicción, supongamos que $m$ no es cota superior de $\varnothing$, entonces existe $x \in \varnothing$ tal que $x > m$, pero esto contradice la vacuidad de $\varnothing$. Por lo tanto, $m$ es una cota superior de $\varnothing$. Análogamente se demuestra que $m$ es una cota inferior de $\varnothing$.

(ii) Sea $m \in \mathbb{R}$. Probaremos que $m$ NO es cota inferior de $\mathbb{R}$. Procedemos por contradicción, para ello supongamos que $m$ es cota inferior de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $m - 1 \in \mathbb{R}$ y $m - 1 < m$, esto contradice que $m$ es cota inferior de $\mathbb{R}$. Análogamente se prueba que $m$ tampoco es cota superior de $\mathbb{R}$.

(iii)(a) Veamos que $A = (a, b)$ es acotado superiormente. Afirmamos que $b \in \mathbb{R}$ es una cota superior de $A$: para verlo, si $x \in A$, por definición tenemos que $x < b$, así que $x \leq b$.

Así, por definición de cota superior, $b$ es cota superior de $A$. Ahora, afirmamos que $a \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de $A$: si $x \in A$, por definición se cumple que $a < x$, esto es, $a \leq x$. Luego, por definición, $a$ es cota inferior de $A$. Lo anterior prueba que $A$ es acotado inferior y superiormente, por lo tanto, $A$ es un conjunto acotado.

(iii)(b) Primero demostremos que $B$ es acotado inferiormente. Afirmamos que $a$ es una cota inferior: si $x \in B$, por definición cumple $a \leq x$, de donde se implica que $a \leq x$. Así, por definición, $a$ es una cota inferior de $B$.

Ahora, veamos que $B$ no es acotado superiormente. Para ello, se debe probar que ningún $M \in \mathbb{R}$ cumple que la definición de cota superior de $B$. Sea $M \in \mathbb{R}$. Si $M < a$, entonces $a \in B$ y $M < a$, por lo cual $M$ no es cota superior de $B$. Ahora, si $M \geq a$, entonces $M + 1 \in B$ y $M + 1 > M$, por lo cual, $M$ no es cota superior de $B$. Esto prueba lo deseado.

(iii)(c) En primer lugar, veamos que $C$ es acotado superiormente. Afirmamos que $b$ es una cota superior de $C$: si $x \in C$, por definición se cumple que $x < b$, así que $x \leq b$. Luego, $b$ es cota superior de $C$ por definición.

Para terminar, demostremos que $C$ no es acotado inferiormente. Sea $m \in \mathbb{R}$, veamos que $m$ NO es cota inferior de $m$. Si $m \geq b$, entonces $b - 1 \in C$ y $b - 1 < m$, por lo cual $m$ no es cota inferior de $C$; por otro lado, si $m < b$, entonces $m - 1 \in C$ y $m - 1 < m$, por lo cual $m$ no es cota inferior de $C$. Esto prueba que $C$ no es acotado inferiormente. ∎

Note que si $\alpha$ es una cota superior de $A \subset \mathbb{R}$, entonces $\alpha + r$, con $r > 0$, también es una cota superior de $A$, es decir, si un conjunto es acotado superiormente, entonces tiene una infinidad de cotas superiores. De manera análoga, si $\beta$ es una cota inferior de $A$, entonces $\beta - r$, con $r > 0$, también es una cota inferior de $A$, por lo cual, si un conjunto es acotado inferiormente, entonces tiene una infinidad de cotas inferiores.

**Definición 3.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Decimos que $a_0 \in \mathbb{R}$ es un *supremo* de $A$ si $a_0$ cumple

(i). $a_0$ es una cota superior de $A$,

(ii). si $b \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de $A$, entonces $a_0 \leq b$.

La definición anterior suele referirse diciendo que *el supremo es la más pequeña de las cotas superiores.*

**Lema 4** (Unicidad del supremo)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Si $A$ admite un supremo, entonces dicho supremo es único.*

*Demostración.* Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos supremos de $A$. Como $a$ y $b$ son supremos, $a$ y $b$ son cotas superiores de $A$. Ahora, como $a$ es supremo de $A$ y $b$ es cota superior de $A$, entonces $a \leq b$; análogamente se muestra que $b \leq a$. Lo anterior implica que $a = b$. ∎

**Notación 5.** En virtud del lema anterior, cuando $A$ admite un supremo denotaremos a dicho número por $\sup(A)$.

**Definición 6.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Decimos que $a_0$ es un *ínfimo* de $A$ si

(i). $a_0$ es una cota inferior,

(ii). si $b$ es otra cota inferior de $A$, entonces $b \leq a_0$.

La definición anterior suele referirse diciendo que *el ínfimo es la más grande de las cotas inferiores*. De manera análoga al Lema 4, tenemos un resultado para el ínfimo.

**Lema 7** (Unicidad del ínfimo)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Si $A$ admite un ínfimo, entonces dicho ínfimo es único.*

En virtud del lema anterior, cuando $A$ admite un ínfimo lo denotaremos por $\operatorname{inf}(A)$.

**Axioma del supremo.** Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si $A \neq \varnothing$ y $A$ es acotado superiormente, entonces $A$ tiene supremo.

**Ejemplo 8.** (i). $A = \varnothing$ no admite supremo.

(ii). $A = \mathbb{R}$ no admite supremo.

(iii). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ fijos.

(a) $A = (-\infty, b)$ tiene supremo y $\sup(A) = b$.

(b) $A = [a, b]$ tiene supremo y $\sup(A) = b$.

*Demostración.* (i) Como $A = \varnothing$ no podemos aplicar el Axioma del supremo. Procedemos por contradicción. Supongamos que $a \in \mathbb{R}$ es un supremo para $A$. Por lo visto en el inciso 1 del Ejemplo 2, tenemos que $a-1$ es una cota superior de $\varnothing$, pero $a-1 < a$, lo cual contradice que $a$ es supremo de $\varnothing$. Por lo tanto, $A = \varnothing$ no admite supremo.

(ii) Ya demostramos que $\mathbb{R}$ no es acotado superiormente, por lo cual no puede tener supremo (pues el supremo es una cota superior).

(iii)(a) Usaremos el axioma del supremo para garantizar que $A = (-\infty, b)$ tiene supremo. Notemos que $b - 1 \in A$, lo cual implica que $A \neq \varnothing$. Ahora, $a + 1$ es una cota superior de $A$. Así, como $A$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente, por el axioma del supremo, $A$ admite un supremo.

Veamos que $\sup(A) = b$. En primer lugar, $b$ es una cota superior de $A$ porque si $x \in A$, entonces $x < b$ por definición de $A$. Ahora, sea $y \in \mathbb{R}$ otra cota superior de $A$, queremos demostrar que $y \geq b$. Procedemos por contradicción. Supongamos que $y < b$. Entonces $y \in A$.

Ahora, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se cumple que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $y < q < b$. Pero esto significa que $q \in A$, y como $y < q$, esto contradice que $y$ es una cota superior de $A$. Por lo tanto, $b \leq y$. Esto prueba que $\sup(A) = b$ (note que estamos usando la unicidad del supremo, porque se está demostrando que $b$ cumple la definición de supremo).

(iii)(b) Tenemos que $A = [a, b]$ es no vacío porque $\frac{a+b}{2} \in A$, además, $b + 5$ es una cota superior de $A$, así que por el axioma del supremo se cumple que existe el supremo de $A$. Afirmamos que $\sup(A) = b$. En primer lugar, observamos que $b$ es una cota superior de $A$ porque si $x \in A$, entonces $x \leq b$, y esta es la definición de ser cota superior. Ahora, si $y$ es otra cota superior de $A$, queremos demostrar que $b \leq y$. Nuevamente procedemos por contradicción. Supongamos que $y < b$. Luego, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se cumple que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $y < q < b$. A partir de la última desigualdad se obtiene que $q \in A$ por la definición de $A$, pero esto contradice que $y$ es cota superior de $A$. Por lo tanto, $b \leq y$. Esto prueba que $\sup(A) = b$. ■

**Observación.** Los últimos dos ejemplos muestran dos hechos importantes: el supremo de un conjunto puede, o no, ser elemento del conjunto. Por ello, sea cuidadoso cuando haga afirmaciones respecto a si el supremo pertenece o no al conjunto que esté considerando.

**Definición 9.** Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado superiormente, decimos que $A$ tiene máximo si $\sup(A) \in A$. En tal caso, denotamos por $\max(A)$ a dicho máximo.

**Lema 10.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple que $\alpha = \sup(A)$ si y sólo si $\alpha$ es cota superior de $A$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que*

$$\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha.$$

*Demostración.* Para la primera implicación supongamos que $\alpha = \sup(A)$. Por hipótesis, $\alpha$ es una cota superior. Para la segunda parte procedemos por contradicción. Supongamos que para toda $x \in A$ se cumple que $x \leq \alpha - \varepsilon < \alpha$. Entonces $\alpha - \varepsilon$ es una cota superior de $A$ que es menor que $\alpha$, pero esto contradice la definición de supremo. Por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.

Para la segunda implicación supongamos que $\alpha$ es una cota superior de $A$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$. Para ver que $\alpha = \sup(A)$ resta probar que si $y \in \mathbb{R}$ es otra cota superior de $A$, entonces $\alpha \leq y$. Así, sea $y$ otra cota superior de $A$. Procedemos por contradicción, supongamos que $y < \alpha$, entonces $\varepsilon_0 = \alpha - y > 0$, así que existe $x_0 \in A$ tal que

$$y = \alpha - (\alpha - y) = \alpha - \varepsilon_0 < x_0 \leq \alpha,$$

de donde $y < x_0$ y $x_0 \in A$, lo que contradice que $y$ es cota superior de $A$. Por lo tanto, $\alpha \leq y$. Finalmente, por la unicidad del supremo obtenemos que $\sup(A) = \alpha$. ■

Atención: Este lema (y su análogo para ínfimos) será fuertemente utilizado a lo largo del curso, así que es recomendable que lo aprenda a la brevedad.

**Teorema del ínfimo.** Sea $B \subset \mathbb{R}$. Si $B \neq \varnothing$ y $B$ es acotado inferiormente, entonces $B$ admite un ínfimo.

*Demostración.* Sea $A = \{-x \in \mathbb{R} \mid x \in B\}$. Sea $m \in \mathbb{R}$ una cota inferior de $B$, entonces $-m$ es una cota superior de $A$. Como $A \neq \varnothing$ porque $B \neq \varnothing$, y $A$ es acotado superiormente, entonces existe $\sup(A)$.

Afirmamos que $\inf(B) = -\sup(A)$. Es inmediato que $-\sup(A)$ es una cota inferior de $B$. Sea $y \in \mathbb{R}$ otra cota inferior de $B$, queremos demostrar que $y \leq -\sup(A)$. Por contradicción, supongamos que $y > -sup(A)$. Entonces $-y < \sup(A)$. Ya que $y$ es cota inferior de $B$, se cumple que $y \leq x$ para toda $x \in B$, lo cual implica que $-x \leq -y$ para toda $x \in B$, así que $-y$ es cota superior de $A$, así que por definición de supremo obtenemos que $\sup(A) \leq -y$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $y \leq -\sup(A)$. Esto prueba que $\inf(B) = -\sup(B)$ (note que estamos usando la unicidad del ínfimo porque hemos demostrado que $-\sup(A)$ cumple la definición de ínfimo). ∎

**Ejemplo 11.** (i). $A = \varnothing$ no admite ínfimo.

(ii). $A = \mathbb{R}$ no admite ínfimo.

(iii). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ fijos.

(a) $A = (a, \infty)$ tiene ínfimo e $\inf(A) = a$.

(b) $A = [a, b]$ tiene ínfimo e $\inf(A) = a$.

*Demostración.* Análoga a la prueba del Ejemplo 8. ∎

**Observación.** Los últimos dos ejemplos muestran dos hechos importantes: el ínfimo de un conjunto puede, o no, ser elemento del conjunto. Por ello, sea cuidadoso cuando haga afirmaciones respecto a si el ínfimo pertenece o no al conjunto que esté considerando.

**Definición 12.** Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, decimos que $A$ tiene mínimo si $\inf(A) \in A$. En tal caso, denotamos por $\min(A)$ a dicho mínimo.

**Lema 13.** *Sean $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente, y $\beta \in \mathbb{R}$. Se cumple que $\beta = \inf(B)$ si y sólo si $\beta$ es cota inferior de $B$ y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $x \in B$ tal que*

$$\beta \leq x < \beta + \varepsilon.$$

*Demostración.* Análoga a la prueba del Lema 10. ∎

Para continuar, probaremos dos resultados que serán frecuentemente utilizados, junto con los Lemas 10 y 13.

**Teorema 14.** *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.*

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente. Como $\mathbb{N} \neq \varnothing$, por el axioma del supremo existe $\sup(\mathbb{N})$. Denotemos $\alpha = \sup(\mathbb{N})$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha \geq n$. Esto último implica que $\alpha \geq n+1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ porque si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n+1 \in \mathbb{N}$. Así, $\alpha - 1 \geq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\alpha - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ y $\alpha - 1 < \alpha$, lo cual contradice que $\alpha$ es supremo. Por lo tanto, $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente. ■

**Teorema 15** (Propiedad arquimediana)**.** *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.*

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$, es decir, $\mathbb{N}$ es acotado, pero esto contradice el Teorema 14. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. ■

Recordemos otro resultado auxiliar.

**Lema 16.** *Si $x \geq 0$ y para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que $x \leq \varepsilon$, entonces $x = 0$.*

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que $x \neq 0$. A partir de la hipótesis se obtiene que $x > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < x$, pero esto contradice que $x \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $x = 0$. ■

Para concluir este repaso, veamos cómo se comportan el supremo y el ínfimo respecto a operaciones con conjuntos. Este resultado será importante para realizar varias demostraciones y permitirá evitar errores al hacer consideraciones respecto a estas cantidades: la integral se define como un supremo (o un ínfimo).

**Proposición 17** (Propiedades del supremo y del ínfimo)**.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados.*

*(i).* *Si* $A \subset B$, *entonces* $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.

*(ii).* $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

*(iii).* $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

*(iv).* *Si* $-A = \{-a \mid a \in A\}$, *entonces* $\inf(-A) = -\sup(A)$ *y* $\sup(-A) = -\inf(A)$.

*(v).* *Si* $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, *entonces* $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ *y también* $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

*(vi).* *Si* $b > 0$ *y* $bA = \{ba \mid a \in A\}$, *entonces* $\sup(bA) = b\sup(A)$ *y además* $\inf(bA) = b\inf(A)$.

*Demostración.* (i) Es inmediato a partir de las definiciones de supremo e ínfimo.

(ii) Como $A$ y $B$ son no vacíos, se tiene que $A \cup B$ es no vacío. Ya que $A$ y $B$ son acotados (en particular son acotados superiormente), se sigue que $A \cup B$ es acotado superiormente

(¿puede dar un argumento completo de este hecho?). Denotemos $\alpha = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$. Claramente $\alpha$ es una cota superior de $A \cup B$: si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$; si $x \in A$, entonces $x \leq \sup(A) \leq \alpha$, mientras que si $x \in B$, entonces $x \leq \sup(B) \leq \alpha$. Ahora, si $y$ es cota superior de $A \cup B$, en particular es cota superior de $A$ y de $B$ (¿puede demostrar esto?), así que $y \geq \sup(A)$ y $y \geq \sup(B)$ por definición de supremo, y a partir de esto obtenemos que $y \geq \alpha$. Luego, por la unicidad del supremo, obtenemos que $\sup(A \cup B) = \alpha$.

(iii) La prueba es análoga al inciso anterior.

(iv) La demostración para el ínfimo se hizo en la prueba del Teorema del ínfimo. La prueba para el supremo es análoga.

(v) Denotemos $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \sup(B)$. Por definición de supremo se cumple que $a \leq \alpha$ para toda $a \in A$ y $b \leq \beta$ para toda $b \in B$. A partir de esto, $a + b \leq \alpha + \beta$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, lo cual prueba que $\alpha + \beta$ es una cota superior de $A + B$. Así, $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$.

Veamos que $\sup(A + B) = \alpha + \beta$. Usaremos el Lema 16: probaremos que para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que $\alpha + \beta \leq \sup(A + B) + \varepsilon$. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 10, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $x \in A$ tal que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq \alpha$ y también existe $y \in B$ tal que $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq \beta$. Esto implica que $\alpha - x < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\beta - y < \frac{\varepsilon}{2}$, de donde $\alpha + \beta - x - y < \varepsilon$. Luego, $\alpha + \beta - \varepsilon < x + y \leq \sup(A + B)$, de donde obtenemos que $\alpha + \beta \leq \sup(A + B) + \varepsilon$. Esto prueba que para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que $\alpha + \beta \leq \sup(A + B) + \varepsilon$, o bien, $\alpha + \beta - \sup(A + B) \leq \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Como $\alpha + \beta \geq \sup(A + B)$, entonces $\alpha + \beta - \sup(A + B) \geq 0$, así que por el Lema 16, $\alpha + \beta - \sup(A + B) = 0$, es decir, $\alpha + \beta = \sup(A + B)$. Esto termina la prueba. ∎