Ayudantía 05
Integrales y Teorema del Valor Intermedio

Ejercicio 1. *Si $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es monótona, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f = f(a)(c-a)+f(b)(b-c).$$

Demostración. Ya que f es monótona, entonces f es integrable sobre $[a,b]$ (vea el **Ejemplo 4** de la **Clase 05** para el caso cuando f es no decreciente), por lo cual existe $\int_a^b f$. Ahora, definimos $G:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mediante

$$G(x) = f(a)(x-a)+f(b)(b-x)-\int_a^b f.$$

A partir de la definición de G es inmediato que G es continua en $[a,b]$. A continuación, observamos que

$$G(a) = f(b)(b-a)-\int_a^b f$$

y también

$$G(b) = f(a)(b-a)-\int_a^b f.$$

Caso 1: Supongamos que f es no decreciente. Si $f(a)=f(b)$, como $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$ para toda $x\in[a,b]$, se sigue que $f(x)=f(a)=f(b)$ para toda $x\in[a,b]$, esto es, f es una función constante, de donde

$$\int_a^b f = \int_a^b f(a) = f(a)\int_a^b 1 = f(a)(b-a),$$

por lo cual, para cualquier $c\in(a,b)$ se cumple que

$$G(c) = f(a)(c-a)+f(b)(b-c)-\int_a^b f = f(a)(b-a)-\int_a^b f = 0$$

es decir,

$$\int_a^b g = f(a)(c-a)+f(b)(b-c).$$

Ahora, si $f(a)<f(b)$, tenemos que

$$\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\} = f(b) \quad \text{e} \quad \inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\} = f(a)$$

Así, si $P=\{a,b\}$ es la partición trivial de $[a,b]$, obtenemos que

$$f(a)(b-a) = \underline{S}(f,P)\leq\int_a^b f\leq\overline{S}(f,P) = f(b)(b-a).$$

De hecho, si consideramos $P_1 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ cualquier refinamiento no trivial de P, tenemos que

$$\underline{S}(f,P) < \underline{S}(f,P_1) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P_1) < \overline{S}(f,P)$$

(demuéstrelo) por lo cual

$$f(a)(b-a) = \underline{S}(f,P) < \int_a^b f < \overline{S}(f,P) = f(b)(b-a).$$

de donde se sigue que

$$G(b) = f(a)(b-a) - \int_a^b f < 0 < f(b)(b-a) - \int_a^b = G(a)$$

esto es,

$$G(b) < 0 < G(a).$$

Como G es continua en $[a,b]$, por el Teorema del Valor Intermedio obtenemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $G(c) = 0$, es decir,

$$f(a)(c-a) + f(b)(b-c) - \int_a^b f = 0$$

de donde se obtiene la conclusión deseada:

$$\int_a^b f = f(a)(c-a) + f(b)(b-c).$$

Caso 2: Si f es no creciente se procede de manera totalmente análoga al Caso 1 (hágalo).

A partir de los Casos 1 y 2 se obtiene el resultado deseado. Esto termina la prueba. ∎

Ejercicio 2. *Suponga que $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$. Demuestre que existe $x \in [a,b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$. ¿Es posible elegir siempre un $x \in (a,b)$?*

Demostración. Como f es integrable sobre $[a,b]$, entonces la función $F : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f$ es continua en $[a,b]$ en virtud del **Teorema 2** de la **Clase 08**. Luego, la función $G : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \left(\int_a^b f\right) - F(x) = \int_a^b f - \int_a^x f = \int_x^b f$$

también es continua en $[a,b]$ porque es la resta de dos funciones continuas. Ahora, tenemos que $H : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = F(x) - G(x)$ es continua en $[a,b]$. Notamos que

$$H(a) = F(a) - G(a) = -\int_a^b f$$

y también

$$H(b) = F(b) - G(b) = \int_a^b f.$$

Si $H(a) = 0$, entonces basta tomar $x = a$. En otro caso, $H(a)$ y $H(b)$ tienen distintos signos, de donde por el Teorema del Valor Intermedio existe $x \in (a, b)$ tal que $H(x) = 0$, esto es

$$\int_a^x f - \int_x^b f = 0,$$

de donde obtenemos que

$$\int_a^x f = \int_x^b f.$$

Notemos que para la función cuya gráfica aparece en la Figura 1 las únicas soluciones son $x = a$ y $x = b$: en este caso, f se elige de manera que $\int_a^c f = \int_c^b f$. ∎

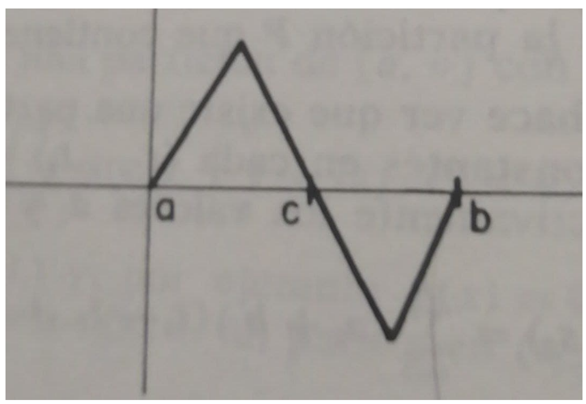

Figura 1: Ejemplo de función tal que los únicos valores $x \in [a, b]$ para los cuales $G(x) = 0$ son $x = a$ y $x = b$.