Ayudantía 06
¿Integrales y gráficas de funciones?

Ejercicio 1. *Suponga que la Figura 1 representa la gráfica de una función f definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Esboce la gráfica de la función $F:[a,e]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$.*

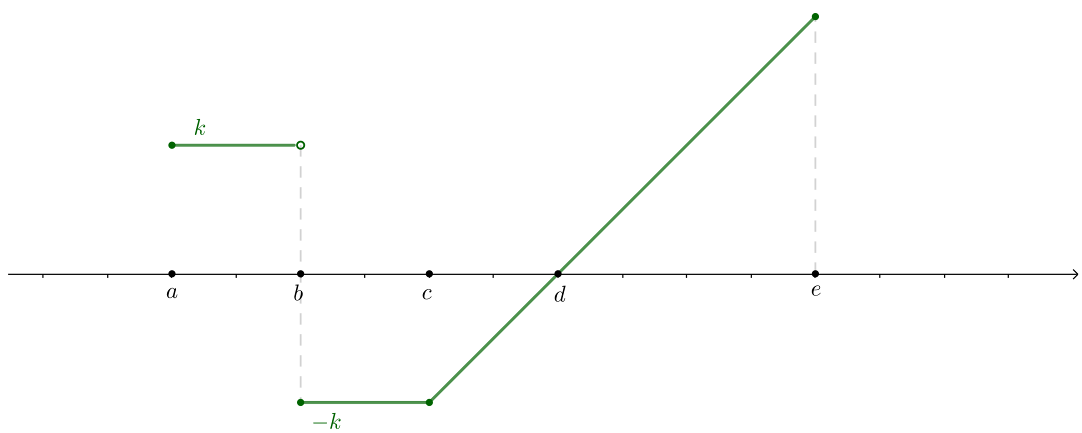

Figura 1: Gráfica de f (Ejercicio 1).

Demostración. Por el **Teorema 2** de la **Clase 08** sabemos que F es una función continua. Sin embargo, podemos mejorar esa afirmación. Note que la función f es continua salvo en b. Así, para toda $x\in[a,e]\setminus\{b\}$, por el **Primer Teorema Fundamental del Cálculo** obtenemos que F es derivable en x y además $F'(x)=f(x)$.

¿Cómo usamos la información anterior? Ya que sabemos que F es derivable salvo en b (recuerde: si una función es derivable en un punto, entonces la función es continua en dicho punto), así que organicemos lo que sabemos por partes:

(i). Tenemos que para $x\in[a,b)$ se cumple que $F'(x)=k>0$. Así, la derivada de F es constante y también es positiva para todos los puntos. Esto nos dice dos cosas: como $F'(x)>0$ para toda $x\in[a,b)$, entonces la función F es estrictamente creciente[1]; además, un teorema de cálculo diferencial[2] nos dice que si una función g tiene derivada constante $g'(x)=\alpha$ para todos los puntos de su dominio (en un intervalo abierto), entonces $g(x)=\alpha x+\beta$ para alguna $\beta\in\mathbb{R}$. En

[1] Otros autores llaman a esta condición ser **no decreciente**, lo cual encuentro difícil de manipular cuando queremos negar cosas (lo veremos en la siguiente sesión). Es preferible decir que f *estrictamente creciente* si $a<b$ implica que $f(a)<f(b)$.

[2] En realidad se usa un teorema que nos dice que si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo, entonces difieren en una constante. ¿Puede decir cómo estamos utilizando dicho resultado?

nuestro caso, esto último significa que $F(x) = kx + \beta$ para alguna $\beta \in \mathbb{R}$. Por la continuidad de F, $F(a) = ka + \beta$, pero $F(a) = \int_a^a f = 0$, así que $\beta = -ka$. Por lo tanto, para toda $x \in [a, b)$ se tiene que $F(x) = kx - ka = k(x - a)$.

(ii). Como F es continua en todo su dominio, se cumple que

$$F(b) = \lim_{x \to b^-} F(x) = \lim_{x \to b^-} k(x - a) = k(b - a).$$

(iii). Ahora, vemos que si $x \in (b, c]$, $F'(x) = -k < 0$. En este caso, la derivada de F es constante y es negativa en todos sus puntos. Esto nos dice que la función es estrictamente decreciente. Por el teorema de cálculo diferencial mencionado antes y por la continuidad de F, obtenemos que $F(x) = -kx + \gamma$ para alguna $\gamma \in \mathbb{R}$. Como $F(b) = k(b - a)$ y por la continuidad también tenemos que

$$F(b) = \lim_{x \to b^+} F(x) = \lim_{x \to b^+} (-kx + \gamma) = -kb + \gamma,$$

entonces $kb - ka = -kb + \gamma$, de donde $\gamma = 2kb - ka = k(2b - a)$. Por lo tanto, si $x \in [b, c]$, entonces $F(x) = -kx + k(2b - a) = k(2b - a - x)$.

(iv). Ahora, vemos que si $x \in (c, d)$, entonces $F'(x) < 0$, lo cual significa que F es estrictamente decreciente en dicho intervalo. Por la forma de la gráfica (es un segmento de recta inclinado hacia la derecha), sabemos que $F''(x) = f'(x) = \delta$ para alguna $\delta \in \mathbb{R}$ y que $\delta > 0$ (la pendiente de la recta es positiva). Esto nos dice que F es cóncava hacia arriba en (c, d) (¿recuerda el criterio de las caritas?).

(v). También, si $x \in (d, e)$, entonces $F'(x) > 0$, lo cual significa que F es estrictamente creciente en dicho intervalo. También, por la forma de la gráfica (como se vio en el inciso anterior), $F''(x) = f'(x) = \delta > 0$. Esto nos dice que F es cóncava hacia arriba en (d, e).

(vi). Notamos que $F'(d) = 0$, entonces F tiene un punto crítico en d. Como $F''(d) = f'(d) = \delta > 0$, entonces por el criterio de la segunda derivada obtenemos que F tiene un mínimo local en d. Otra forma de obtener este resultado es la siguiente: en (c, d) tenemos que F es decreciente y en (d, e) tenemos que F es creciente, así que F debe tener un mínimo en d.

Finalmente, al reunir toda la información anterior, en la Figura 2 se presenta un esbozo de la posible gráfica de F. ¿Qué datos necesitaría para afinar dicha gráfica?

■

Ejercicio 2. *(i). Calcule la derivada de* $F(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3(t)\ dt \right)\ dy \right)$.

(ii). Halle $(F^{-1})'(x)$ *en términos de* $F^{-1}(x)$ *donde* $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt$.

Demostración. (i) Para resolver este problema, escribamos F como una composición de funciones y posteriormente apliquemos la regla de la cadena. En primer lugar, queremos calcular la derivada de F respecto a la variable x, así que si escribimos $g(y) = \int_0^y \operatorname{sen}^3(t)\ dt$, entonces $F(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}(g(y))\ dy \right)$. Ahora, definimos $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(g(y))\ dy$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)$. Entonces

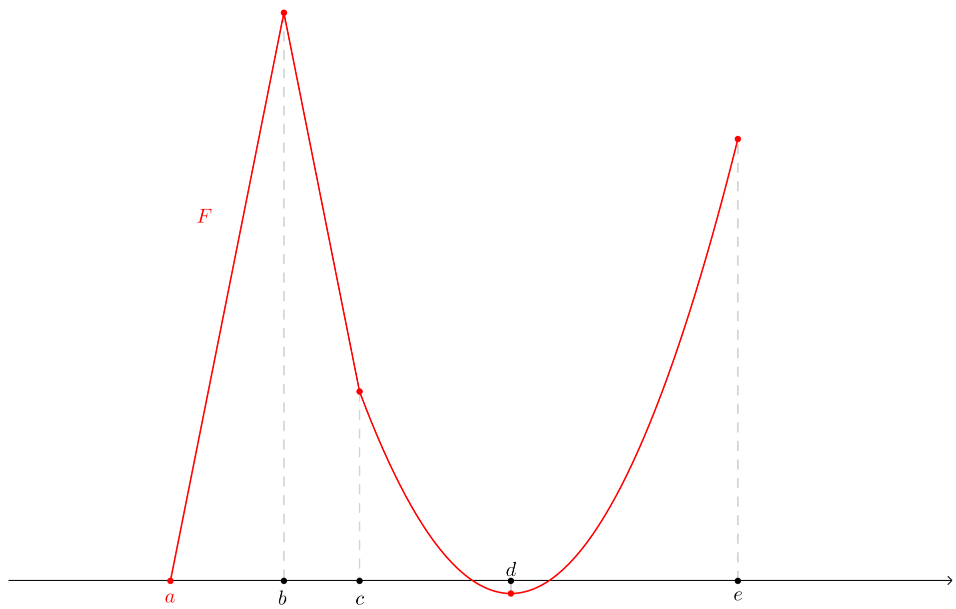

Figura 2: Esbozo de la gráfica de F.

$f'(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ por el Teorema Fundamental del Cálculo. Además, sabemos que $h'(x) = \cos(x)$. Ya que

$$h(f(x)) = \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}(g(y))\ dy\right) = F(x),$$

al aplicar la regla de la cadena obtenemos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= (h \circ f)'(x) \\ &= h'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \cos\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3(t)\ dt\right)\right) \cdot \operatorname{sen}(g(x)) \\ &= \cos\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3(t)\ dt\right)\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}^3(t)\ dt\right) \end{aligned}$$

(ii) Consideremos $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces f es continua en $(0,\infty)$, por lo cual f es continua en cualquier intervalo de la forma $[a,1]$ (si $a \leq 1$) o $[1,a]$ (si $a \geq 1$) con $a > 0$. Entonces, la función $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\ dt = \int_1^x f$ es derivable para toda $x > 0$ por el Teorema Fundamental del Cálculo y además $F'(x) = f(x)$. Así, para toda $x > 0$ se cumple que $F'(x) > 0$, lo cual implica que F es estrictamente creciente. Por lo tanto, F es invertible.

Ahora, por el Teorema de la Función Inversa (¿recuerda qué dice este teorema?), se cumple que

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))},$$

de donde obtenemos que

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{1}{F^{-1}(x)}} = F^{-1}(x).$$

Esto prueba que $(F^{-1})'(x) = F^{-1}(x)$. ∎

El ejercicio anterior será muy importante más adelante en este curso.