Ayudantía 07
Más aplicaciones del Teorema Fundamental del Cálculo

Ejercicio 1. *Suponga que f es derivable con $f(0) = 0$ y $0 < f'(x) \le 1$ para toda $x \ge 0$. Entonces para toda $x \ge 0$ se cumple que*

$$\int_0^x f^3 \le \left(\int_0^x f\right)^2.$$

Demostración. Definimos $F(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$. Demostraremos que para toda $x \ge 0$ se cumple que $F(x) \ge 0$. Como $F(0) = 0$ por la definición de F, basta considerar $x > 0$.

Como f es derivable, esto implica que f es continua, por lo cual f^3 también es continua. A partir de esto, tanto $G(x) = \int_0^x f$ como $H(x) = \int_0^x f^3$ son derivables para toda $x > 0$ por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, y además $G'(x) = f(x)$ y $H'(x) = f^3(x)$. Entonces

$$F'(x) = (G(x)^2)' - H'(x) = 2G(x) \cdot G'(x) - H'(x) = 2f(x)\left(\int_0^x f\right) - f^3(x). \tag{1}$$

Ya que F es derivable, si demostramos que $F'(x) \ge 0$ para toda $x > 0$, esto implica que F es creciente[1], y como $F(0) = 0$, esto prueba que $F(x) \ge 0$ para toda $x \ge 0$.

Puesto que $f'(x) > 0$ para toda $x \ge 0$, entonces f es estrictamente creciente. Ya que $f(0) = 0$, esto implica que $f(x) > 0$ para toda $x > 0$. Luego, para demostrar que $F'(x) \ge 0$ para $x > 0$, al dividir (1) entre $f(x)$, basta probar que para $x > 0$ se cumple que

$$h(x) = 2\left(\int_0^x f\right) - f^2(x) \ge 0.$$

Ya que $h(0) = 0$ y h es derivable, basta demostrar que $h'(x) \ge 0$ para toda $x > 0$. Como $h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x))$ y ya sabemos que $f(x) > 0$ para toda $x > 0$, para ver que $h'(x) \ge 0$ basta ver que $1 - f'(x) \ge 0$ para toda $x > 0$, es decir, $1 \ge f'(x)$, pero esta es una de las hipótesis. Por lo tanto, $h'(x) \ge 0$ para toda $x > 0$. Esto termina la prueba. ∎

Ejercicio 2. *Sin calcular la integral y usando técnicas de cálculo, esboce la gráfica de la función $G : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_{-1}^x |t|\, dt$.*

Demostración. Notemos que por definición de G se cumple que $G(-1) = 0$. Ahora, si $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = |x|$, entonces g es continua en $[-1, 1]$, así que por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos que G es derivable para toda $x \in [-1, 1]$ y además $G'(x) = g(x)$. Lo anterior significa que $G'(x) \ge 0$ para toda $x \in [-1, 1]$, lo cual implica que G es creciente. Como $G'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, $x = 0$ es el único punto crítico en $(-1, 1)$ y además, G es estrictamente creciente cuando $G'(x) > 0$. Por lo tanto, $G(x) \ge 0$ para toda $x \in [-1, 1]$.

Para continuar, note que si $x \in (-1, 0)$, entonces

$$G'(x) = g(x) = |x| = -x,$$

[1] Otros autores llaman a esta condición ser **no decreciente**, lo cual encuentro difícil de manipular cuando queremos negar cosas. Es preferible decir que f *estrictamente creciente* si $a < b$ implica que $f(a) < f(b)$.

por lo cual $G''(x) = g'(x) = -1 < 0$, y esto implica que G es cóncava hacia abajo en $(-1, 0)$. Análogamente, si $x \in (0, 1)$, entonces

$$G'(x) = g(x) = |x| = x,$$

por lo cual $G''(x) = g'(x) = 1 > 0$, lo cual implica que G es cóncava hacia arriba. Notamos que en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo local (y tampoco podemos aplicar el criterio de la segunda derivada porque no existe $G''(0)$), y como hay cambio de concavidad, entonces es un punto de inflexión.

Con toda la información anterior, un esbozo de la gráfica de G está en la Figura 1.

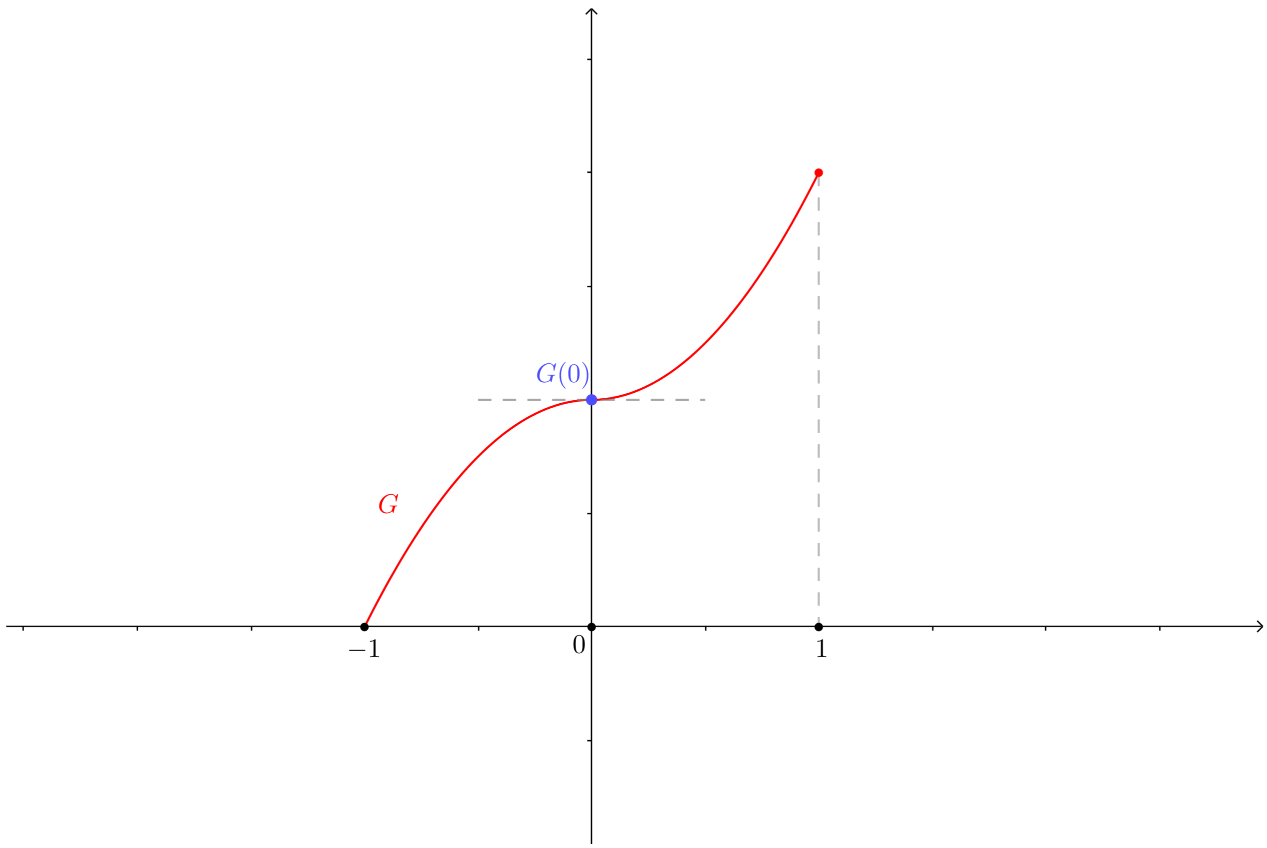

Figura 1: Esbozo de la gráfica de G.

■