Ayudantía 08
Integrales impropias

Hasta ahora nos hemos interesado únicamente en funciones acotadas definidas sobre intervalos cerrados, pues es allí donde tiene sentido la definición de integral. ¿Qué podemos hacer si queremos considerar funciones acotadas definidas sobre intervalos no acotados? ¿Y si queremos tomar funciones no acotadas? ¿Es posible rescatar, en algún sentido, la idea de integral que definimos en el primer capítulo? En esta sesión veremos que sí y daremos algunos ejemplos de las manipulaciones que pueden lograrse al extender nuestro concepto de integral (definida) a los dos casos mencionados.

La siguiente definición expresa los tres posibles escenarios cuando queremos considerar una función definida en un intervalo no acotado.

Definición 1 (Integral impropia para funciones sobre intervalos no acotados)**.**

(i). Sea $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ una función tal que $\int_a^N f$ existe para cualquier $N>a$. Si existe $\lim_{N\to\infty}\int_a^N f$ lo denotamos por $\int_a^\infty f$, es decir,

$$\int_a^\infty f = \int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f,$$

y le llamamos *integral impropia*.

(ii). Sea $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ una función tal que $\int_N^a f$ existe para cualquier $N<a$. Si existe $\lim_{N\to-\infty}\int_N^a f$ lo denotamos por $\int_{-\infty}^a f$, esto es,

$$\int_{-\infty}^a f = \int_{-\infty}^a f(x)\ dx = \lim_{N\to\infty}\int_N^a f,$$

y también le llamamos *integral impropia*.

(iii). Consideremos una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Fijemos $a\in\mathbb{R}$. Si existen las integrales impropias $\int_{-\infty}^a f$ y $\int_a^\infty f$, entonces definimos un tercer tipo de integral impropia, que denotamos $\int_{-\infty}^\infty f$, como

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f.$$

Como es usual, para afianzar nuevos conceptos, veamos algunos ejemplos de existencia y no existencia de integrales impropias.

Ejemplo 2. Suponga que $r<-1$ es un número racional. Calcule $\int_1^\infty x^r\ dx$.

Solución. Sea $r<-1$ un número racional. Notamos que la función $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^r$ cumple que, para cada $N>1$, f es continua en $[1,N]$, por lo cual, f es integrable en $[1,N]$ para toda $N>1$. Ahora, notamos que la función $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$, cumple que $g'(x)=f(x)$ para toda $x\in[1,\infty)$, así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (lo abreviaremos 2TFC), para cada $N>1$ se cumple que

$$\int_1^N x^r\ dx = g(N)-g(1) = \frac{N^{r+1}}{r+1}-\frac{1}{r+1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^r\ dx &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{r+1}}{r+1}-\frac{1}{r+1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{N^{r+1}}{r+1}-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{r+1}\\ &= -\frac{1}{r+1}\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene porque $\lim\limits_{N\to\infty} N^{r+1}=0$ porque $r+1<0$.

Por lo tanto,

$$\int_1^\infty x^r\ dx = -\frac{1}{r+1}.$$

■

Ejemplo 3. Demuestre que NO existe $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx$.

Demostración. Para la prueba utilizaremos el siguiente resultado que, por ahora, admitiremos sin demostración

Lema auxiliar. Sean $a,b>0$. Se cumple que

$$\int_1^a \frac{1}{t}\ dt + \int_1^b \frac{1}{t}\ dt = \int_1^{ab}\frac{1}{t}\ dt.$$

Así, usando el Lema auxiliar e inducción, es fácil ver que para toda $n\in\mathbb{N}$ se cumple que

$$\int_1^{2^n}\frac{1}{x}\ dx = n\int_1^2\frac{1}{x}\ dx.$$

Luego, como $\frac{1}{x}\geq 0$ para toda $x\in[1,2]$ y $f(\frac{3}{2})=\frac{2}{3}>0$, por el **Ejercicio 6** de la **Tarea 01**, obtenemos que $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}\ dx>0$. Por esto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{2^n}\frac{1}{x}\ dx = \lim_{n\to\infty} n\int_1^2\frac{1}{x}\ dx = \infty.$$

Lo anterior implica que

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{1}{x}\ dx = \infty.$$

Por lo tanto, el límite que define a la integral impropia no existe, es decir, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x}\ dx$ NO existe. ■

Lema 4. *Supongamos que $f(x)\geq 0$ para toda $x\geq a$ y que existe $\displaystyle\int_a^\infty f$. Si para toda $x\geq a$ se cumple que $0\leq g(x)\leq f(x)$, entonces también existe $\displaystyle\int_a^\infty g$.*

Demostración. Notamos que la función $I:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $I(N)=\displaystyle\int_a^N g$ es creciente y acotada superiormente por $\displaystyle\int_a^\infty f$. Por lo tanto, existe $\lim\limits_{N\to\infty} I(N)$, es decir, existe $\displaystyle\int_a^\infty g$. ■

Ejemplo 5. Demuestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{1+x^2}\ dx$ existe.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Veamos primero que $\int_0^\infty f$ existe. Para ello, mostraremos que $\int_1^\infty f$ existe, pues claramente $\int_0^1 f$ existe porque f es continua en $[0,1]$. Pero vemos que $f(x) \le \dfrac{1}{x^2}$ para toda $x \ge 1$, y por el Ejemplo 2 sabemos que existe $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\, dx$, así que por el Lema 4, obtenemos que $\int_1^\infty f$ también existe. Esto implica que $\int_0^\infty f$ existe.

Ahora, notemos que f es una función par, así que cuando $N > 0$, se cumple que

$$\int_{-N}^0 f = \int_0^N f,$$

por lo cual

$$\lim_{N\to-\infty} \int_N^0 f = \lim_{M\to\infty} \int_0^M f = \int_0^\infty f.$$

Lo anterior muestra que

$$\int_{-\infty}^0 f = \int_0^\infty f,$$

por lo cual,

$$\int_{-\infty}^\infty f = 2\int_0^\infty f.$$

■

Ejemplo 6. Demuestre que $\int_{-\infty}^\infty x\ dx$ no existe. Muestre que, por otro lado, $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N x\ dx$ si existe.

Demostración. Demostraremos que $\int_1^\infty x\ dx$ no existe. Lo haremos por contradicción. Supongamos que $\int_1^\infty x\ dx$ existe. Como $0 \le \frac{1}{x} \le x$ para toda $x \ge 1$, por el Lema 4, obtenemos que $\int_1^\infty \dfrac{1}{x}\ dx$ existe, pero esto contradice el resultado obtenido en el Ejemplo 3. Por lo tanto, $\int_1^\infty x\ dx$ no existe. Así, por definición, $\int_{-\infty}^\infty x\ dx$ NO existe.

Ahora, como $f(x) = x$ es una función impar, entonces $\int_{-N}^N x\ dx = 0$ para toda $N \ge 0$. Por lo tanto, $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f = 0$. ■

Dado que existen funciones como las del Ejemplo 6 es que no se definió a $\int_{-\infty}^\infty f$ como el límite $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f$ (cuando dicho límite existe). Sin embargo, el siguiente lema ilustra que cuando existe la integral impropia, entonces sí se puede considerar el límite propuesto y en efecto resultará ser igual a la integral impropia.

Lema 7. *Si* $\int_{-\infty}^\infty f$ *existe,* $\lim_{N\to\infty} h(N) = \infty$ *y* $\lim_{N\to\infty} g(N) = -\infty$*, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{g(N)}^{h(N)} f = \int_{-\infty}^\infty f.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que existe $\int_{-\infty}^{\infty} f$, por definición significa que existen $\int_{-\infty}^{0} f$ y $\int_{0}^{\infty} f$. Así que, por definición de límite, existe $M_0 > 0$ tal que si $M \geq M_0$, entonces

$$\left| \int_0^M f - \int_0^\infty f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y también

$$\left| \int_{-M}^0 f - \int_{-\infty}^0 f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, nuevamente por la definición de límite, existe $N_0 > 0$ tal que si $N \geq N_0$, entonces $h(N) > M_0$ y $g(N) < -M_0$. Luego, si $N \geq N_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \int_{g(N)}^{h(N)} f - \int_{-\infty}^{\infty} f \right| &= \left| \int_{g(N)}^{0} f - \int_{-\infty}^{0} f + \left(\int_0^{h(N)} f - \int_0^\infty f \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{g(N)}^{0} f - \int_{-\infty}^{0} f \right| + \left| \int_0^{h(N)} f - \int_0^\infty f \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba. ∎

Pasemos ahora al problema de las funciones no acotadas. Para los fines de la exposición, únicamente nos interesaremos en funciones no negativas y no acotadas "cerca" de cero.

Definición 8 (Integral impropia para funciones no acotadas)**.**

(i). Sea $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ una función no negativa. Supongamos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ y $\int_\varepsilon^a f$ existe para toda $\varepsilon > 0$. Si existe el límite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^a f$, entonces a dicho límite le llamamos *integral impropia* y lo denotamos por

$$\int_0^a f = \int_0^a f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^a f.$$

(ii). Sea $f : [a, 0] \to \mathbb{R}$ una función no negativa. Supongamos que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \infty$ y $\int_a^\varepsilon f$ existe para toda $\varepsilon < 0$. Si existe el límite $\lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_a^\varepsilon f$, entonces a dicho límite también le llamamos *integral impropia* y lo denotamos por

$$\int_a^0 f = \int_a^0 f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_a^\varepsilon f.$$

(iii). Finalmente, si para una función $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$, existen $\int_{-a}^0 f$ y $\int_0^a f$, definimos la integral impropia

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^0 f + \int_0^a f.$$

Ejemplo 9. Sea $a > 0$. Halle el valor de $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

Demostración. Notamos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$. Además, por el 2TF, obtenemos que

$$\int_\varepsilon^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{\varepsilon},$$

así que

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{a}.$$

■

Ejemplo 10. Si $-1 < r < 0$ es un número racional, calcule el valor de $\displaystyle\int_0^a x^r\, dx$.

Demostración. Por el 2TFC obtenemos que

$$\int_\varepsilon^a x^r\, dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{\varepsilon^{r+1}}{r+1},$$

así que

$$\int_0^a x^r\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a x^r\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{\varepsilon^{r+1}}{r+1}\right) = \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

porque $r + 1 > 0$ y por lo tanto $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{r+1} = 0$. ■

Ejemplo 11. Demuestre que $\displaystyle\int_0^a x^{-1}\, dx$ no tiene sentido ni siquiera como límite.

Demostración. Notemos que por el Lema auxiliar (y por inducción) se cumple que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_{\frac{1}{2^n}}^1 \frac{1}{x}\, dx = n \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\, dx.$$

Luego, como la función definida por $\frac{1}{x}$ es no negativa en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} > 0$, entonces $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\, dx > 0$. Esto implica que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx$ no existe. Por lo tanto $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x}\, dx$ tampoco existe. ■

Pregunta.¿Es posible combinar los dos tipos de integrales impropias anteriores?