Última actualización: 7 de octubre de 2021

Clase 08

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

En este capítulo construiremos funciones a partir de funciones integrables para después analizar sus propiedades.

f "chiquita" y F "grandota"

Consideremos una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$. Por el Teorema 6 de la Clase 06, para cada $x \in (a,b)$ se tiene que f es integrable en $[a,x]$, es decir, para cada $x \in (a,b)$ existe el número

$$\int_a^x f.$$

También, por ser f integrable en $[a,b]$, existe el número $\int_a^b f.$

Note entonces que podemos asignar a cada $x \in (a,b]$ el número $\int_a^x f$. Así, si definimos $\int_a^a f$, podríamos construir una función que tenga como dominio el intervalo $[a,b]$. Ahora, recordando que la motivación que dimos para introducir el concepto de integrales es el "área bajo una curva" y la idea intuitiva de que "bajo un punto no hay área" entonces damos la siguiente definición.

Definición 1 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$, definimos $\int_a^a f$ y $\int_b^a f$ como sigue*

$$\int_a^a f = 0 \qquad y \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Note que la definición de $\int_b^a f$ se puede interpretar como el "area bajo la curva recorrida en dirección negativa". Además, con esta definición garantizamos que para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

siempre que f sea integrable en el intervalo de mayor longitud que determinen a,b,c.

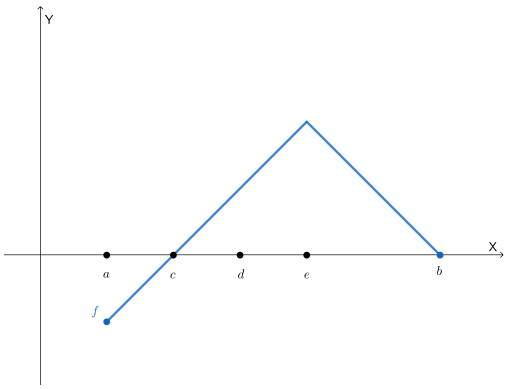
Tenemos, ahora sí, una forma de asignar a cada $x \in [a,b]$ un número real, a saber

$$\int_a^x f.$$

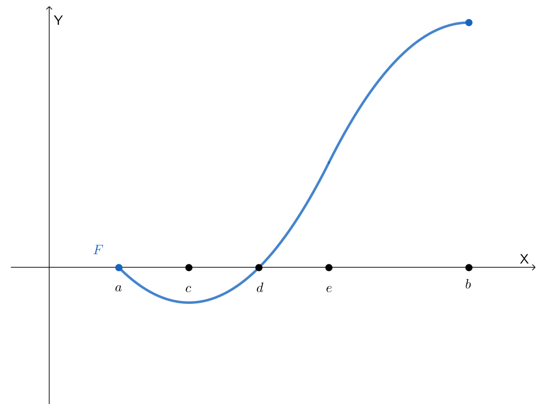
En resumen, dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$, definimos $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f$$

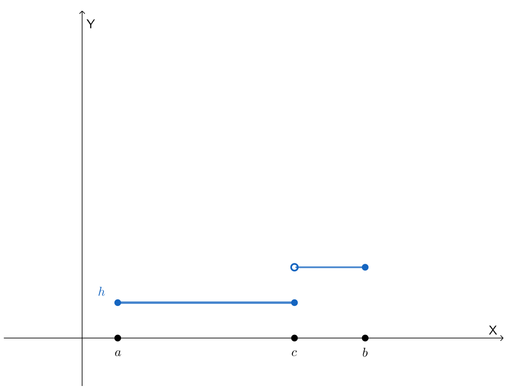
(vea figura 1).



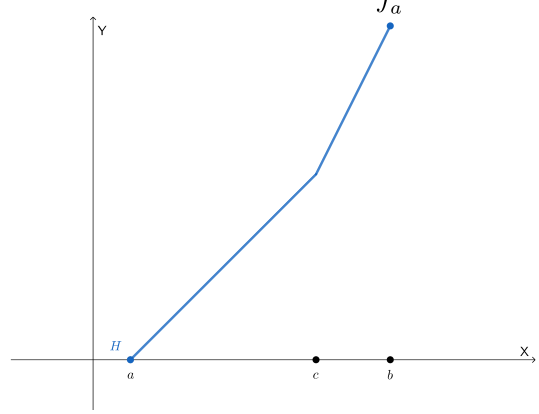
(a) Gráfica de una función f integrable en $[a, b]$.



(b) Gráfica de $F(x) = \int_a^x f$



(c) Gráfica de una función h integrable en $[a, b]$.



(d) Gráfica de $H(x) = \int_a^x h$

Figura 1

Note que la función que hemos definido tiene la variable como límite de integración superior, pero, gracias al Teorema 6 de la Clase 06, también podemos definir una función cuya variable sea el límite de integración inferior, pues si f es una función integrable en $[a, b]$ y $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f,$$

de donde

$$\int_x^b f = \int_a^b f - \int_a^x f.$$

Así, si $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$G(x) = \int_x^b f,$$

entonces

$$G(x) = \int_a^b f - F(x),$$

donde $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ esta dada por $F(x) = \int\limits_a^x f$.

¿Y qué propiedades tiene F? ¿Hereda alguna propiedad de f?

Teorema 2 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a, b]$.

Demostración. Debemos demostrar que para cada $c \in [a, b]$ se tiene que

$$\lim_{x \to c} F(x) = F(c)$$

o de manera equivalente que

$$\lim_{h \to 0} F(c + h) = F(c).$$

Es decir, debemos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal manera que si $|h| < \delta$ y $c + h \in [a, b]$, entonces $|F(c + h) - F(c)| < \varepsilon$.
Comencemos analizando la expresión $F(c + h) - F(c)$. Si $h > 0$, entonces

$$F(c + h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$$

y si $h < 0$, entonces

$$F(c + h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = -\int_{c+h}^c f.$$

Ahora, como f es integrable, entonces f es acotada, es decir, existe $M > 0$ de tal manera que

$$-M \leq f(x) \leq M,$$

para cada $x \in [a, b]$. Así, si $h > 0$, entonces para cada $x \in [c, c + h]$ se tiene que $-M \leq f(x) \leq M$ y, por el Teorema 4 de la Clase 07,

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f \leq Mh. \tag{1}$$

Y si $h < 0$, entonces para cada $x \in [c+h, c]$ se tiene que $-M \leq f(x) \leq M$ y, por el Teorema 4 de la Clase 07,

$$Mh \leq \int_{c+h}^{c} f \leq -Mh. \tag{2}$$

Luego, usando que $-\int_{c+h}^{c} f = \int_{c}^{c+h} f$, podemos reescribir la desigualdad (2) como sigue

$$-Mh \geq \int_{c}^{c+h} f \geq Mh. \tag{3}$$

De (1) y (3), se tiene que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_{c}^{c+h} f \right| \leq M|h|$$

(es importante notar que si $c = a$, entonces el caso cuando $h < 0$ no tiene sentido y cuando $c = b$ el caso en que $h > 0$ no tiene sentido, pero de cualquier manera se puede concluir la desigualdad anterior).

Así, para $\varepsilon > 0$ dado, es suficiente elegir $\delta < \varepsilon/M$. ■

Estamos en condiciones de aplicar todos nuestros conocimientos sobre funciones continuas a la función F.

Ejemplo 3 *Considere la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

(Vea figura 2). Demuestre que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_{0}^{\xi} f(t)\ dt \geq \int_{0}^{x} f(t)\ dt$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Solución. Note que la función f es continua en $[0, 1]$, así que, por el Teorema 5 de la Clase 06, f es integrable en $[0, 1]$.

Luego, por el Teorema 2, la función $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{0}^{x} f$$

es continua en $[0, 1]$. Por lo tanto, F alcanza su valor máximo en $[0, 1]$, es decir, existe $\xi \in [0, 1]$ tal que

$$F(\xi) \geq F(x)$$

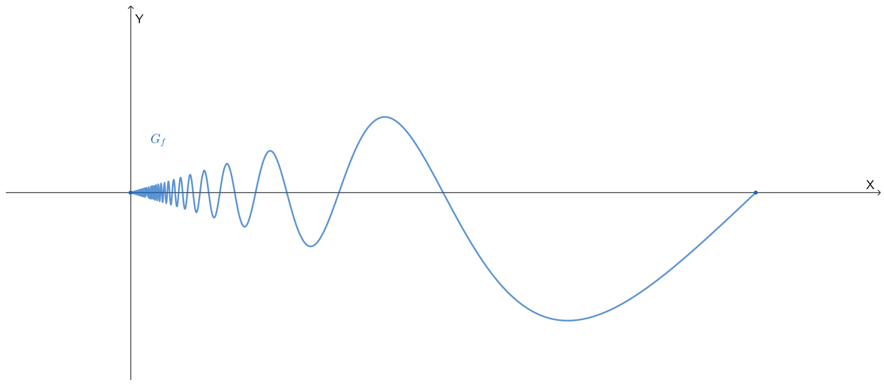


Figura 2: Gráfica de f.

para todo $x \in [0,1]$. Así,

$$\int_0^{\xi} f(t)\ dt \geq \int_0^{x} f(t)\ dt$$

para todo $x \in [0,1]$. ■

Para definir F solo necesitamos que f sea una función integrable en $[a,b]$ y sin alguna propiedad adicional para f obtuvimos que F es continua en $[a,b]$, entonces ¿qué deberíamos pedirle a f para que F sea derivable?