Última actualización: 14 de octubre de 2021

Clase 09

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

La sesión anterior construimos funciones a partir de funciones integrables y resultó que estas nuevas funciones son continuas:

Teorema 1 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

En esta sesión enunciaremos y demostraremos el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, en él se menciona qué condición debe satisfacer f para F resulte una función derivable.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Lema 2 *Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$. Si f es continua en c, entonces las funciones $m, M : [(a-c)/2, (b-c)/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como*

$$m(h) = \begin{cases} \inf\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\} & \textit{si } h \geq 0 \\ \inf\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\} & \textit{si } h \leq 0 \end{cases}$$

y

$$M(h) = \begin{cases} \sup\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\} & \textit{si } h \geq 0 \\ \sup\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\} & \textit{si } h \leq 0 \end{cases}$$

son continuas en 0, es decir,

$$\lim_{h\to 0} m(h) = f(c) = \lim_{h\to 0} M(h).$$

Demostración. Debemos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $h \in [(a-c)/2, (b-c)/2]$ que cumpla que $|h| < \delta$ se tiene que

$$|m(h) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |M(h) - f(c)| < \varepsilon.$$

Entonces, sea $\varepsilon > 0$ fijo. Como f es continua en c, para el número $\varepsilon/2 > 0$, existe $\delta > 0$ de tal manera que si $x \in [a,b]$ y $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$.
Afirmamos que si $|h| < \delta$, entonces

$$|m(h) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |M(h) - f(c)| < \varepsilon.$$

Analicemos dos casos:

(1) $0 \leq h < \delta$. En este caso tenemos, para cada $x \in [c, c+h]$, que $0 \leq x - c \leq h < \delta$, de donde $|x - c| < \delta$, así que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. De manera equivalente

$$f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $x \in [c, c+h]$. Ahora, por la primer desigualdad obtenemos que $f(c) - \varepsilon/2$ es cota inferior de $\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$ y de la segunda desigualdad que $f(c) + \varepsilon/2$ es cota superior de $\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$. Se sigue que

$$f(c) - \varepsilon < f(c) - \varepsilon/2 \leq m(h) \quad \text{y} \quad M(h) \leq f(c) + \varepsilon/2 < f(c) + \varepsilon.$$

Luego, como $m(h) \leq f(x) \leq M(h)$ para cada $x \in [c, c+h]$, se sigue que

$$|f(c) - m(h)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(c) - M(h)| < \varepsilon.$$

(2) $-\delta < h \leq 0$. Ahora tenemos, para cada $x \in [c+h, c]$, que $-\delta < h \leq x - c \leq 0$, de donde $|x - c| < \delta$, así que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Es decir,

$$f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De la primer desigualdad obtenemos que $f(c) - \varepsilon/2$ es cota inferior de $\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\}$ y de la segunda desigualdad que $f(c) + \varepsilon/2$ es cota superior de $\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\}$. Por lo que

$$f(c) - \varepsilon < f(c) - \varepsilon/2 \leq m(h) \quad \text{y} \quad M(h) \leq f(c) + \varepsilon/2 < f(c) + \varepsilon$$

y como $m(h) \leq f(x) \leq M(h)$ para cada $x \in [c+h, c]$, se tiene que

$$|f(c) - m(h)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(c) - M(h)| < \varepsilon.$$

De los dos casos concluimos que, si $|h| < \delta$, entonces

$$|f(c) - m(h)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(c) - M(h)| < \varepsilon.$$

■

Vale la pena notar que modificando las definiciones de m y M cuando f es continua en $c = a$ y en $c = b$ y siguiendo los casos (1) y (2) se puede demostrar que m y M son continuas en 0. Es decir, el resultado anterior vale aún cuando $c = a$ o $c = b$.

Teorema 3 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $[a, b]$ y para cada $x \in [a, b]$ se tiene que

$$F'(x) = f(x).$$

Demostración. Debemos demostrar que para cada $c \in [a,b]$ existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h}.$$

Para ello , analicemos la expresión $\dfrac{F(c+h)-F(c)}{h}$:

(1) Si $h>0$, entonces

$$F(c+h)-F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Luego, si definimos m_h y M_h como

$$m_h = \inf\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\} \quad \text{y} \quad M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\},$$

por el Teorema 4 de la Clase 07, tenemos que

$$m_h h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h h.$$

Es decir,

$$m_h h \leq F(c+h)-F(c) \leq M_h h.$$

Así que

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

(2) Ahora, si $h<0$, tenemos que

$$F(c+h)-F(c) = -\int_{c+h}^{c} f.$$

En este caso, si definimos m_h y M_h como

$$m_h = \inf\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\} \quad \text{y} \quad M_h = \sup\{f(x) \mid x \in [c+h, c]\},$$

por el Teorema 34 de las Notas 01, tenemos que

$$m_h(-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h(-h),$$

luego, multiplicando por (-1)

$$m_h h \geq -\int_{c+h}^{c} f \geq M_h h.$$

Es decir,

$$m_h h \geq F(c+h)-F(c) \geq M_h h.$$

Ahora, como $h<0$,

$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$

Note que en cualquier caso
$$m_h \leq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leq M_h.$$
Así, por el Lema 2,
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$
Note que esta demostración vale para $c \in (a,b)$, pero de los casos (1) y (2) se siguen los casos cuando $c = a$ y $c = b$, respectivamente. ■