Última actualización: 15 de octubre de 2021

Clase 10

Este documento está basado en el libro *Cálculo infinitesimal* de Michael Spivak y su propósito es complementar los vídeos explicativos que proporcionaremos a lo largo del curso.

En la clase anterior enunciamos y demostramos uno de los teoremas más importantes del Cálculo:

Teorema 1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $[a,b]$ y para cada $x \in [a,b]$ se tiene que

$$F'(x) = f(x).$$

Por cierto, si recordamos que una integral la relacionamos con el concepto de *área* y una derivada con el concepto de *velocidad instantanea*, ¿ya notó que este teorema relaciona el *área* con la *velocidad instantanea*? Bonito, ¿no?

Dedicaremos esta sesión a mostrar cómo aplicar el Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Una pregunta natural es si vale el regreso del Primer Teorema Fundamental del Cálculo, es decir, si $F(x) = \int_a^x f$ es una función derivable en $[a,b]$ ¿f es continua en $[a,b]$? La respuesta es NO, enseguida un contraejemplo.

Ejemplo 2 *Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida como*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq 1 \\ 3 & si\ x = 1 \end{cases}$$

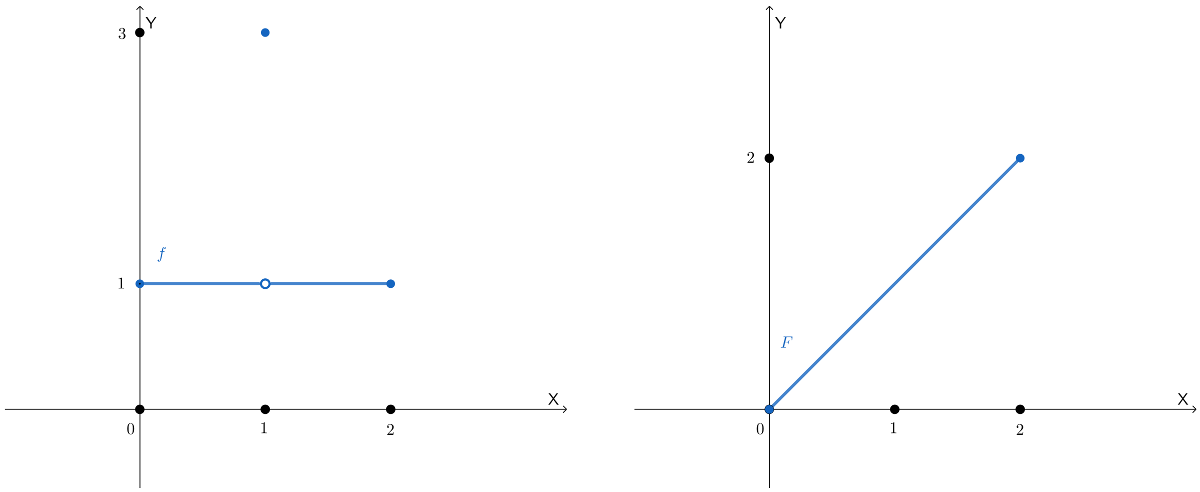
Halle explícitamente F.

Solución. Note que, por el Ejercicio 2 de la Tarea 01, f es integrable en $[0,2]$ por lo que F está bien definida. Luego, es fácil ver que

$$F(x) = \int_0^x f = 1(x-0) = x$$

para cada $x \in [0,2]$. Es decir, $F(x) = x$ para cada $x \in [0,2]$.

Note que F es derivable en $[0,2]$, pero f no es continua en $[0,2]$, pues es discontinua en 1 (vea figura 1) ■



(a) f es discontinua en 1.

(b) F es derivable en $[0, 2]$.

Figura 1

Ejemplo 3 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por*

$$G(x) = \int_x^b f(t)\ dt.$$

Muestre que G es derivable en $[a, b]$ y halle $G'(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Solución. Consideremos la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Como f es continua en $[a, b]$, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, F es derivable. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_x^b f(t)\ dt \\ &= \int_a^b f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt \\ &= \int_a^b f(t)\ dt - F(x) \end{aligned}$$

para cada $x \in [a, b]$, es decir, G es la diferencia de una función constante con la función F. De aquí que G es derivable en $[a, b]$ y $G'(x) = -F'(x) = -f(x)$ para cada $x \in [a, b]$. $\blacksquare$

Ejemplo 4 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a.b]$. Muestre que la función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H(x) = \int_b^x f$$

es derivable en $[a, b]$ y halle $H'(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Solución. Se tiene, para cada $x \in [a, b]$, que

$$H(x) = \int_b^x f = -\int_x^b f = -G(x),$$

donde G es la función del Ejemplo 3. Así, H es derivable y

$$H'(x) = -G'(x) = -(-f(x)) = f(x),$$

para cada $x \in [a, b]$. ■

Ejemplo 5 *Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por*

$$G(x) = \int_0^{x^2-1} \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

Muestre que G es derivable y calcule $G'(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 1.$$

Sea $b \geq 0$ arbitrario. Como f es continua en $\mathbb{R}$, entonces f es continua en $[0, b]$. Así, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, la función $J : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

es derivable en $[0, b]$ y para cada $x \in [0, b]$

$$J'(x) = f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

Ahora, sea $a \leq 0$ arbitrario. Como f es continua en $\mathbb{R}$, entonces f es continua en $[a, 0]$. Así, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo y el Ejemplo 4, la función $H : [a, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

es derivable en $[a, 0]$ y para cada $x \in [a, 0]$

$$H'(x) = -(-f(x)) = f(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

Como a y b son arbitarios, concluimos que la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\ dt$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Ahora, note que

$$(F \circ g)(x) = F(g(x)) = \int\limits_0^{g(x)} f(t)\ dt = \int\limits_0^{x^2-1} f(t)\ dt = \int\limits_0^{x^2-1} \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)\ dt$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, $G = F \circ g$. Finalmente, como F y g son derivables en todo $\mathbb{R}$, entonces la composición es derivable y

$$G'(x) = (F \circ g)'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x) = \left(1 + \frac{1}{1+(x^2-1)^2}\right) 2x.$$

$\blacksquare$