Ayudantía 09
Funciones trigonométricas: π, gráficas y límites

Iniciamos esta sesión con una propiedad importante acerca de uno de los números más utilizados en la vida cotidiana (incluso tiene dos días festivos).

Ejercicio 1. *Demuestre que* $\pi > 3$. *Recuerde que, por definición,* $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

La idea de la demostración recae en la "intuición geométrica": los primeros intentos de Arquímedes para obtener el valor de π fueron mediante aproximaciones sucesivas mediante polígonos inscritos a una circunferencia. Nosotros recuperaremos esa idea y utilizaremos el poder del Cálculo Integral para obtener el resultado deseado.

Demostración del Ejercicio 1. Sea $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Notamos que g es una función par, por lo cual,

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\left(2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right) = 4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{1}$$

Así, para demostrar que $\pi > 3$ nos basta ver que

$$\frac{3}{4} < \int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{2}$$

Para la prueba construiremos una función integrable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in [0,1]$, f continua, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$ y además

$$\int_0^1 f = \frac{3}{4}.$$

Procedemos a la demostración. Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -(2-\sqrt{3})x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -x + \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{3}-2}(x-1) & \text{si } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notamos que f es una función continua en $[0,1]$ y, por lo tanto, es una función integrable en $[0,1]$. Ahora, calculemos $\int_0^1 f$. Ya que f está definida por trozos y es integrable, podemos calcular dicha integral en subintervalos, así

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-(2-\sqrt{3})x + 1\right)\,dx = -(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-2+4}{8} = \frac{\sqrt{3}+2}{8},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} f = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}-2}(x-1)\right)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}-2}\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{8},$$

y por lo tanto

$$\int_0^1 f = \int_0^{\frac{1}{2}} f + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} f = \frac{\sqrt{3}+2}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2-\sqrt{3}}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

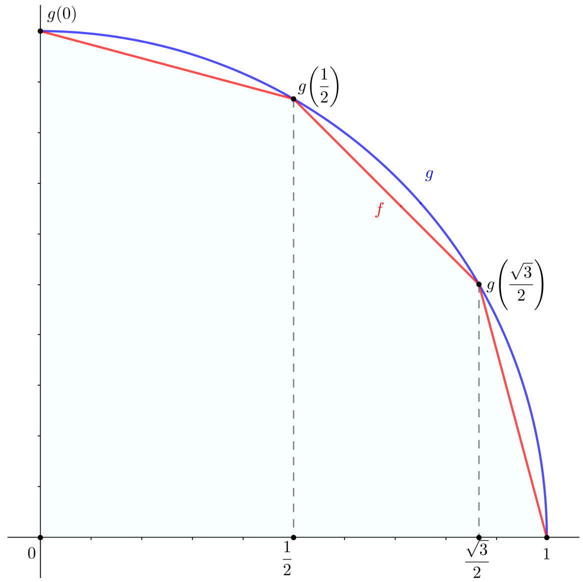

Figura 1: Gráficas de f y g.

Notamos que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in [0,1]$ (¿puede demostrarlo?). Como f y g son continuas en $[0,1]$, entonces $g-f$ es continua en $[0,1]$. Ahora, notamos que si $x_0 = \frac{2}{3}$, entonces $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo cual

$$(g-f)(x_0) = \sqrt{1-\frac{4}{9}} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+2}{3} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1+2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{6} > 0$$

porque $1+2\sqrt{5} > 3\sqrt{3}$. Así, como $g-f$ es una función no negativa, continua en x_0 y $(g-f)(x_0) > 0$, luego, por el Ejercicio 6 de la Tarea 01 que dice que si una función no negativa es continua y positiva en un punto, entonces la integral es positiva, obtenemos que

$$\int_0^1 (g-f) > 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{3}{4} = \int_0^1 f < \int_0^1 g,$$

de donde obtenemos que

$$3 < 4\int_0^1 g = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$$

Esto termina la prueba. ■

Ejercicio 2. *Esboce la gráfica de la función* $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

Demostración. En primer lugar, $|f(x)| \leq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$ porque $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Notemos que f es una función par porque $f(-x) = \operatorname{sen}((-x)^2) = \operatorname{sen}(x^2) = f(x)$. Así, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y, por lo cual nos basta hacer el análisis para $x \geq 0$. Ahora, notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $f(\sqrt{k\pi}) = \operatorname{sen}((\sqrt{k\pi})^2) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0$, así que la gráfica de f corta al eje X en los puntos de la forma $\sqrt{k\pi}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Notemos que si $x \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$, entonces $f'(x) = 2x\cos\left(x^2\right) > 0$, por lo cual f es creciente en tal intervalo. También, notamos que $f'(0) = 0$. Además, $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $f(0) = 0$. En los intervalos sucesivos, f se comporta como el seno.

Es importante notar que a pesar de que $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{k\pi} = \infty$, los intervalos de la forma $\left(\sqrt{k\pi}, \sqrt{(k+1)\pi}\right)$ son "cada vez más pequeños" en el sentido de que su "longitud" es cada vez menor. Para verlo, notamos que si $g(x) = \sqrt{x\pi}$ en $[k, k+1]$, entonces g es continua en $[k, k+1]$ y derivable en $(k, k+1)$, así que, por el Teorema del Valor Medio, existe $x_0 \in (k, k+1)$ tal que

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x_0}} = g'(x_0) = \frac{g(k+1) - g(k)}{k+1-k} = \sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi},$$

esto es

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x_0}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}}.$$

En la Figura 2 se puede ver un esbozo de la gráfica de f.

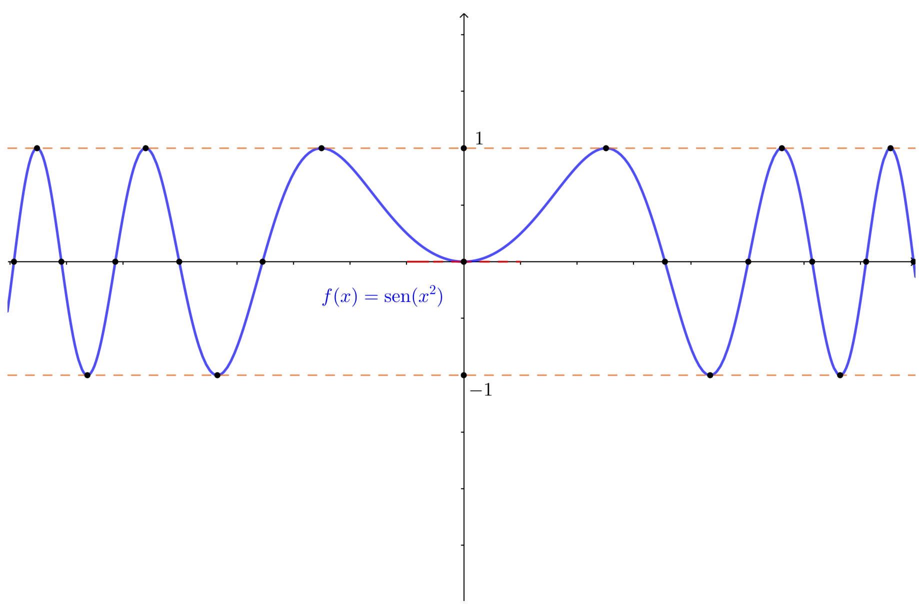

Figura 2: Esbozo de la gráfica de f.

■

Ejercicio 3. *Halle los siguientes límites.*

(i). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x - \frac{x^3}{6}}{x^3}$. *(ii).* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x + \frac{x^3}{3}}{x^3}$. *(iii).* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}(x)}$.

Demostración. La idea de solución en todos los problemas es utilizar la regla de L'Hôpital cuando sea posible. En virtud de esto, haremos algunas observaciones:

(a) Se utiliza la regla de L'Hôpital cuando es posible, es decir, cuando se verifican las hipótesis del teorema correspondiente.

(b) Una solución completa implica escribir TODAS las funciones que se consideran y todos los límites por separado, pues de esta manera se prueba que se cumplen las hipótesis necesarias para el teorema.

(c) En la práctica se escriben igualdades una tras otra, donde cada una de ellas se justifica una vez que se aplica la regla de L'Hôpital.

En virtud de lo anterior, desarrollaremos completamente el primer inciso y el segundo se hará utilizando sucesivamente la regla de L'Hôpital, con el cuidado de verificar (¿mentalmente?) que se puede aplicar dicho teorema. Finalmente, el tercer inciso ilustrará que debemos ser cuidadosos cuando queremos aplicar regla de L'Hôpital.

(i) Notemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{sen}(x)-x-\frac{x^3}{6}\right)=0=\lim_{x\to 0}x^3.$$

Observamos que ambas funciones son derivables y además al calcular el límite de sus derivadas obtenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)-1-\frac{x^2}{2}\right)=0=\lim_{x\to 0}3x^2.$$

Nuevamente, ambas funciones son derivables y al calcular el límite de las derivadas de las funciones anteriores obtenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(-\operatorname{sen}(x)-x\right)=0=\lim_{x\to 0}6x.$$

Finalmente, como las dos funciones anteriores son derivables y las derivadas de dichas funciones cumplen que

$$\lim_{x\to 0}\left(-\cos(x)-1\right)=-2 \text{ y } \lim_{x\to 0}6=6,$$

entonces podemos aplicar regla de L'Hôpital sucesivamente y obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x-\frac{x^3}{6}}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1-\frac{x^2}{2}}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)-x}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)-1}{6}\\&=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x-\frac{x^3}{6}}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

(ii) Tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-x+\frac{x^3}{3}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+x^2}{3x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2x}{6x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde aplicamos la regla de L'Hôpital sucesivamente porque las funciones cumplen las hipótesis del teorema.

(iii) Notemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x),$$

y podríamos estar tentados a usar regla de L'Hôpital, sin embargo, notemos que la función $\frac{1}{x}$ no está definida en 0, así que tampoco lo está $x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, por lo cual la función no es derivable (pues ello implicaría que es continua) en 0, por lo cual no se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital. En este caso, usaremos el siguiente resultado:

Lema. *Si* $|f(x)| \leq M$ *para toda* x *y* $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$*, entonces* $\lim_{x\to 0} fg(x) = 0$.

Además, recordemos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, por lo cual $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$. También, notemos que $|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ para toda $x \neq 0$. Así, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} x \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 0,$$

por el Lema obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)} = 0.$$

■