Ayudantía 10
Ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 1. *Demuestre que existe un único* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{sen}(x_0) = x_0 - 1$.

Demostración. Definimos $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x + 1$. Notamos que $f(0) = \operatorname{sen}(0) - 0 + 1 = 1$ y $f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) - \pi + 1 = 1 - \pi < 0$, así, como f es una función continua, por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_0 \in (0, \pi)$ tal que $f(x_0) = 0$, esto es, $\operatorname{sen}(x_0) - x_0 + 1 = 0$, de donde $\operatorname{sen}(x_0) = x_0 - 1$. Ahora, $f'(x) = \cos(x) - 1 < 0$ para toda $x \in (0, \pi)$, así que f es estrictamente decreciente en $(0, \pi)$ y por lo tanto hay una única solución en $(0, \pi)$.

Ahora, notamos que si $x < 0$, entonces $\operatorname{sen}(x) + 1 \geq 0$ y $-x > 0$, así que

$$\operatorname{sen}(x) - x + 1 \geq -x > 0,$$

por lo cual si $x < 0$, esto implica que $f(x) > 0$, es decir, $f(x) \neq 0$. Por otro lado, si $x > \pi$, $\operatorname{sen}(x) \leq 1$ y $-x < -\pi < -3$, de donde

$$\operatorname{sen}(x) - x + 1 \leq 1 - x + 1 < 2 - \pi < 2 - 3 = -1,$$

esto es, $f(x) < -1$ cuando $x > \pi$ y, por ello, $f(x) \neq 0$. En conclusión, existe un único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(x_0) = x_0 - 1$. ■

Ejercicio 2. *Calcule las siguientes integrales.*

(i). $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt.$ *(ii).* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt.$

Demostración. (i) Si $f(t) = \arctan(t)$, entonces $f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) Notemos que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(x)$ para toda $x > 0$ al utilizar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo con la función f de la prueba del inciso anterior, entonces

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

■

Ejercicio 3. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función periódica. Si* $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *es infinito, entonces el periodo de* f *es irracional.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que el periodo c de f es racional, es decir, $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$. Vemos que esto implica que $p = cq$ también es un periodo de f porque

$$f(x) = f(x + c) = f(x + qc) = f(x + p).$$

Luego, por el algoritmo de la división, obtenemos que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$f(n) = f(ap + m) = f(m),$$

donde $n = ap+m$ con $0 \leq m \leq p-1$, y la segunda igualdad se satisface porque f es periódica de periodo p. Lo anterior implica que $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{f(0), \ldots, f(p-1)\}$, pero esto es una contradicción con la hipótesis de que dicho conjunto es infinito. ∎

Ejercicio 4. *Demuestre que la ecuación* $\tan(x) = x$ *tiene una infinidad de soluciones.*

Demostración. Definamos $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$. Notamos que f es derivable en $(0,1)$ y continua en $(0,1]$. Observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n\pi) = 0$, así que por el Teorema de Rolle aplicado a f en $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, obtenemos que existe $x_{n+1} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ tal que $f'(x_n) = 0$. Ya que

$$f'(x_n) = -\frac{\pi}{x_n}\cos\left(\frac{\pi}{x_n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x_n}\right),$$

obtenemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \frac{\pi}{x_n}\cos(\frac{\pi}{x_n})$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Notamos que la relación anterior implica que $\cos\left(\frac{\pi}{x_n}\right) \neq 0$, porque en caso contrario se seguiría que $\operatorname{sen}(t) = 0 = \cos(t)$ para un mismo valor t, y sabemos que ello no ocurre porque $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Por ello

$$\tan\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \frac{\pi}{x_n}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$, esto prueba que hay una infinidad de soluciones para la ecuación $\tan(x) = x$. ∎