Ayudantía 11
π es irracional

Una de las primeras demostraciones que realizamos en un curso de cálculo es que $\sqrt{2}$ es un número irracional y resulta ser una prueba que ilustra cómo proceder por contradicción. Sin embargo, la misma demostración no funciona para π, y de hecho fue todo un logro el obtener una prueba de que π es irracional. En esta sesión veremos una prueba que utiliza las técnicas que hemos aprendido hasta ahora y que involucran fuertemente el uso de las técnicas de cálculo diferencial e integral.

Comenzamos la preparación considerando las siguientes funciones.

Definición 1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Notemos que las siguientes propiedades son fáciles de obtener.

Observación 2. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes afirmaciones.

(i). Si $x \in (0,1)$, entonces $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ porque $x^n < 1$ y $(1-x)^n < 1$.

(ii). A partir del **Teorema del Binomio** se obtiene que, en la expresión desarrollada de $f_n(x)$, la menor potencia que aparece es n y la mayor es $2n$, es decir, existen $c_n, \ldots, c_{2n} \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} c_i x^i. \tag{1}$$

(iii). A partir de (1), si $k < n$, entonces $f_n^{(k)}(0) = 0$, y también si $k > 2n$ entonces $f_n^{(k)}(0) = 0$.

(iv). Para $n \leq k \leq 2n$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!}\left(n!c_n + \text{ términos con } x\right) \\ f_n^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{n!}\left((n+1)!c_{n+1} + \text{ términos con } x\right) \\ &\vdots \\ f_n^{(2n)}(x) &= \frac{1}{n!}\left((2n)!c_{2n}\right) \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(0) &= c_n \\ f_n^{(n+1)}(0) &= (n+1)c_{n+1} \\ &\vdots \\ f_n^{(2n)}(0) &= (2n)(2n-1)\cdots(n+1)c_{2n} \end{aligned}$$

donde todos los términos son enteros.

(v). Notamos que

$$f_n(1-x) = \frac{(1-x)^n(1-(1-x))^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = f_n(x),$$

de donde al aplicar la regla de la cadena obtenemos que

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x).$$

Lema A. Para toda $k \geq 1$ se cumple que $f_n^{(k)}(0)$ es un entero.

Demostración. Se sigue inmediatamente de (iii) y (iv) de la Observación 2. ∎

El resultado anterior y el inciso (v) de la Observación 2 implican que:

Lema B. Para toda $k \geq 1$ se cumple que $f_n^{(k)}(1)$ es un entero. ∎

Para continuar, demostraremos el siguiente resultado.

Lema C. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a^N}{N!} < \varepsilon$.

Demostración. Notemos que si $a \leq 0$ el resultado es inmediato (tome $N = 1$). Así, supongamos que $a > 0$. Notamos que si $n \geq 2a$, entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

En virtud de lo anterior, si $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo cumple que $n_0 \geq 2a$, se sigue que

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

de donde

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

En virtud de lo anterior, de manera inductiva (¿qué significa esto?), para $k \geq 1$ se cumple que

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}. \tag{2}$$

Ahora, por la propiedad arquimediana, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon\,(n_0!)}{a^{n_0}}$$

y ya que $\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{k_0}$, obtenemos que

$$\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{\varepsilon\,(n_0!)}{a^{n_0}}$$

de donde

$$\frac{1}{2^{k_0}} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!} < \varepsilon. \tag{3}$$

Finalmente, si $N = n_0 + k_0$, a partir de (2) y (3) concluimos que

$$\frac{a^N}{N!} < \varepsilon.$$

Esto prueba lo deseado. ∎

A continuación, demostraremos la siguiente proposición que nos permitirá demostrar rápidamente el teorema que nos interesa.

Proposición 3. *Se cumple que π^2 es un número irracional.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Así, supongamos que π^2 es un número racional, es decir, supongamos que existen a, $b \in \mathbb{Z}$ tales que $a > 0$, $b > 0$ y $\pi^2 = \frac{a}{b}$. Ahora, definimos

$$G(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right). \tag{4}$$

Notamos que

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n \left(\pi^2\right)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k,$$

por lo cual todos los coeficientes que aparecen en $G(x)$ son enteros. Ya que por los Lemas A y B se cumple que $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ y $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$, entonces $G(0) \in \mathbb{Z}$ y también $G(1) \in \mathbb{Z}$.

Ahora, si derivamos G dos veces, obtenemos que

$$G''(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \pi^{2n-6} f_n^{(6)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) \right). \tag{5}$$

Ya que $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ por el inciso (iii) de la Observación 2, al sumar $\pi^2 G$ con G'' se obtiene que

$$\pi^2 G(x) + G''(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x). \tag{6}$$

Ahora, consideremos

$$H(x) = G'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G(x) \cos(\pi x).$$

Así, al calcular la derivada de H obtenemos que

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos(\pi x) + G''(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 G(x) \operatorname{sen}(\pi x) \\ &= \left(G''(x) + \pi^2 G(x) \right) \operatorname{sen}(\pi x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene a partir de (6).

Luego, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que

$$\begin{aligned} \pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)\ dx &= \int_0^1 H'(x)\ dx \\ &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1) \operatorname{sen}(\pi) - \pi G(1) \cos(\pi) - G'(0) \operatorname{sen}(0) + \pi G(0) \cos(0) \\ &= \pi \left(G(1) + G(0) \right), \end{aligned}$$

de donde, como $G(1)$ y $G(0)$ son enteros, obtenemos que

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)\ dx \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

A continuación, a partir del inciso (i) de la Observación 2 tenemos que si $x \in (0, 1)$, entonces $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$, de donde, si $x \in (0, 1)$ se tiene que

$$0 < \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Lo anterior implica que

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)\ dx < \frac{\pi a^n}{n!} \tag{8}$$

a partir de la monotonía de la integral, la continuidad y que si $g(x) > 0$ entonces $\int_r^s g > 0$ aplicado dos veces. Además, observemos que todo lo que hemos realizado hasta ahora se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, por el Lema C, para $\varepsilon = \frac{1}{\pi} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a^N}{N!} < \frac{1}{\pi}$, de donde se sigue que $\frac{\pi a^N}{N!} < 1$ y por (8) obtenemos que

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x)\ dx < 1$$

pero esto contradice (7) porque no hay enteros entre 0 y 1. Por lo tanto, π^2 es un número irracional. ■

Finalmente el resultado anunciado al comienzo.

Teorema principal. Se cumple que π es un número irracional.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que π es un número racional, entonces π^2 es un número racional, pero esto contradice la Proposición 3. Por lo tanto. π es un número racional. Esto termina la prueba. ■