Última actualización: 27 de octubre de 2021

Clase 12

En el capítulo anterior aprendimos a definir funciones usando el concepto de integral, en esta ocasión aprovecharemos esta técnica para introducir de manera formal las funciones trigonométricas.

Las Funciones Trigonométricas
Primera Parte

Recordemos, de nuestros cursos de geometría, que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ describe el conjunto de puntos (x, y) en el plano que pertenecen a la circunferencia unitaria con centro en el origen. Así, si consideramos la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

tenemos que la gráfica de f coincide con la semicircunferencia unitaria por encima del eje horizontal (vea Figura 1). Más aún, la función f es continua en $[-1, 1]$, por lo que f es integrable en $[-1, 1]$.

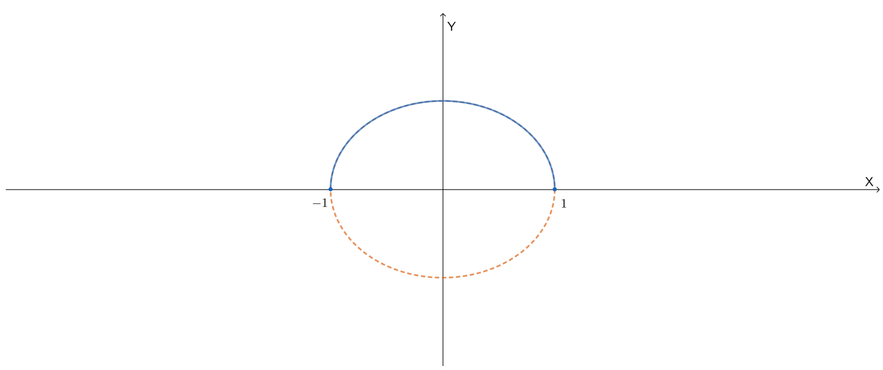


Figura 1: Se muestra la gráfica de f sobre la circunferencia unitaria.

Definición 1 *Definimos el número π como sigue*

$$\pi = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Definición 2 *Definimos la función $A : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla de correspondencia*

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Note que, por el Teorema Fundamental del Cálculo, A es derivable en $(-1,1)$ y para cada $x \in (-1,1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Note que $A'(x) < 0$ para cada $x \in (-1,1)$, por lo que A es decreciente en $(-1,1)$. Ahora, usando que es continua en $[-1,1]$, tenemos que A decrece desde $A(-1)$ hasta $A(1)$. Pero

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad A(1) = 0,$$

así que A decrece desde $\pi/2$ hasta 0 (vea Figura 2). Note también que, por ser decreciente en $[-1,1]$, A es inyectiva en $[-1,1]$.

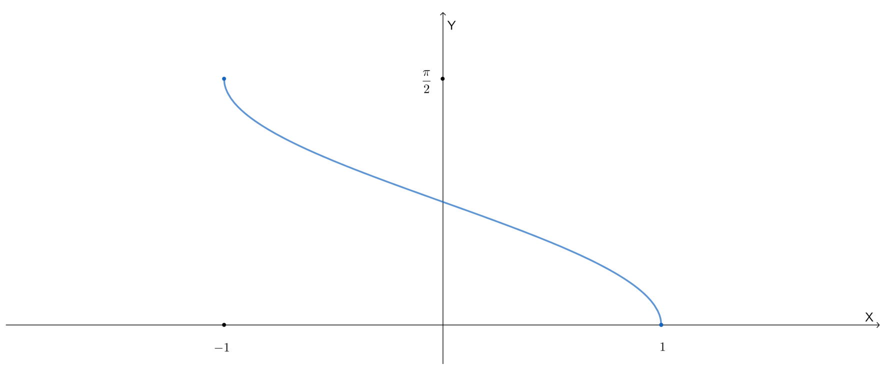


Figura 2: Gráfica de la función A.

Definición 3 *Definimos las funciones* $\cos, \operatorname{sen} : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *como sigue,* $\cos(x)$ *es el único número del intervalo* $[-1,1]$ *tal que*

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}$$

y $\operatorname{sen}(x)$ *como*

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-(\cos(x))^2}.$$

Note que por definición $|\cos(x)| \leq 1$ y $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo $x \in [0,\pi]$. Ahora, una vez definidas las funciones cos y sen (aunque de momento solo en $[0,\pi]$) nos gustaría demostrar que son derivables y para ello es necesario recordar el siguiente teorema visto en los cursos de Cálculo I.

Teorema 4 (Teorema de la Función Inversa) *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua e inyectiva en* $[a,b]$*, y supongamos que* f *es derivable en* $f^{-1}(y)$*, con derivada* $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$*. Entonces* f^{-1} *es derivable en* y*, y*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Teorema 5 *Las funciones* cos *y* sen *son derivables en* $(0,\pi)$ *y para cada* $x \in (0,\pi)$ *se tiene que*

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \quad y \quad \operatorname{sen}'(x) = \cos(x).$$

Demostración. Sea $B : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $B(x) = 2A(x)$. Como A es derivable en $(-1,1)$, B es derivable en $(-1,1)$ y para cada $x \in (-1,1)$, se tiene que

$$B'(x) = 2A'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ahora, para cada $x \in [0,\pi]$, se tiene que $B(\cos(x)) = 2A(\cos(x)) = x$, es decir, cos es la función inversa de la función B. Así que, por el Teorema 4, tenemos que cos es derivable en $(0,\pi)$ y

$$\begin{aligned}
\cos'(x) &= \left(B^{-1}\right)'(x) \\
&= \frac{1}{B'\left(B^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-(B^{-1}(x))^2}}} \\
&= -\sqrt{1-(\cos(x))^2} \\
&= -\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-(\cos(x))^2}$, tenemos que es composición de funciones derivables, por lo tanto es derivable, y por la regla de la cadena tenemos que, para cada $x \in (0,\pi)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{-2\cos(x)\cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}\right) \\
&= \frac{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 6 *Esboce las gráficas de las funciones* cos *y* sen.

Solución. Para la función cos tenemos, por el Teorema 5, que $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) < 0$, para todo $x \in (0,\pi)$. Se sigue que la función cos decrece desde $\cos(0) = 1$ hasta $\cos(\pi) = -1$ (por lo tanto también resulta inyectiva). Ahora, por el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que existe (un único) $x_0 \in (0,\pi)$ tal que $\cos(x_0) = 0$, pero $\cos(x_0)$ es el único número del intervalo $[-1,1]$ tal que

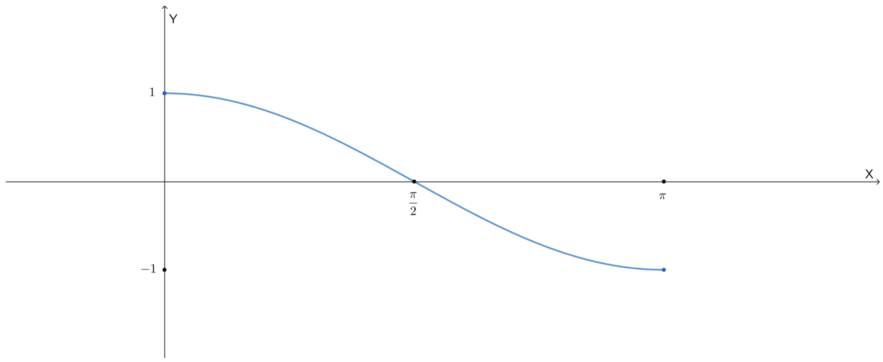
$$A(\cos(x_0)) = \frac{x_0}{2},$$

así que

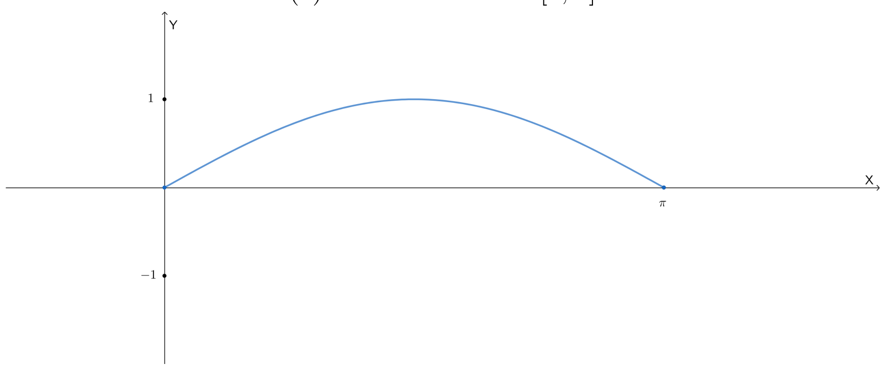
$$A(0) = \frac{x_0}{2},$$

es decir,

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{x_0}{2}.$$



(a) Gráfica de cos en $[0, \pi]$



(b) Gráfica de sen en $[0, \pi]$

Figura 3

Ahora, usando que la función $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es par, se tiene que

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}\, dx,$$

de donde

$$\pi = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Se sigue que $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ahora, para la función sen tenemos que $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$, pero en este caso $\cos(x) > 0$ cuando $x \in (0, \pi/2)$ y $\cos(x) < 0$ cuando $x \in (\pi/2, \pi)$, así que sen es creciente en $[0, \pi/2]$ desde $\operatorname{sen}(0) = 0$ hasta $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ y decreciente en $[\pi/2, \pi]$ desde $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ hasta $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. Vea Figuras 3a y 3b. ■