Última actualización: 5 de noviembre de 2021

Clase 13

Comenzamos este documento recordando un par de definiciones y un teorema vistos la clase anterior:

Definición 1 *Definimos la función* $A : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante la siguiente regla de correspondencia*

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Definición 2 *Definimos las funciones* $\cos, \operatorname{sen} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *como sigue,* $\cos(x)$ *es el único número del intervalo* $[-1, 1]$ *tal que*

$$A(\cos(x)) = \frac{x}{2}$$

y $\operatorname{sen}(x)$ *como*

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - (\cos(x))^2}.$$

Teorema 3 *Las funciones* $\cos$ *y* sen *son derivables en* $(0, \pi)$ *y para cada* $x \in (0, \pi)$ *se tiene que*

$$\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x) \quad y \quad \operatorname{sen}'(x) = \cos(x).$$

En esta ocasión "extenderemos" el dominio de cos y sen a todo $\mathbb{R}$

Las Funciones Trigonométricas
Segunda Parte

Definición 4 *(1) Para cada* $x \in [\pi, 2\pi]$, *definimos* $\cos(x)$ *y* $\operatorname{sen}(x)$ *como*

$$\cos(x) = \cos(2\pi - x) \quad y \quad \operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x).$$

(2) Si $x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$, *entonces existe* $k \in \mathbb{Z}$ *y* $x' \in [0, 2\pi]$ *de tal manera que* $x = 2\pi k + x'$, *así, definimos* $\cos(x)$ *y* $\operatorname{sen}(x)$ *como*

$$\cos(x) = \cos(x') \quad y \quad \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x').$$

Definición 5 *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}$ *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Diremos que* f *es periodica de periodo* $p \neq 0$ *si*

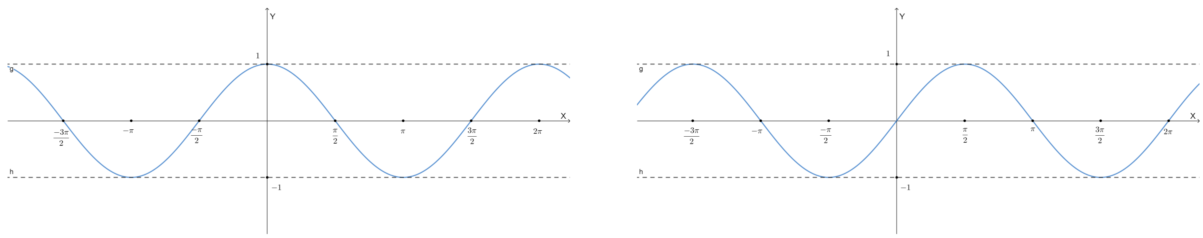
$$f(x) = f(x + p)$$

para todo $x \in A$. *Al número* p *lo llamamos un periodo de* f.

Observación 6 *De la Definición 4, se sigue que:*

(1) $|\cos(x)| \leq 1$ *y* $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(2) Las funciones $\cos$ *y* sen *son continuas en todo* $\mathbb{R}$.



(a) Gráfica de la función coseno. (b) Gráfica de la función seno.

Figura 1

(3) Las funciones $\cos$ *y* sen *son periodicas de periodo* 2π.

(4) $\cos(x) = 0$ *si y sólo si* $x \in \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(5) $\operatorname{sen}(x) = 0$ *si y sólo si* $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

En el siguiente teorema mostraremos que, una vez "extendidas", las funciones sen y cos son derivables en todo $\mathbb{R}$ y que los puntos de la forma $(\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ son puntos sobre la circunferencia unitaria para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Pero, para la demostración de las primeras dos propiedades debemos recordar el siguiente resultado de nuestros cursos de Cálculo I.

Proposición 7 *Sean* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $c \in (a,b)$. *Si* f *es derivable en* (a,b), *quizas excepto en* c, *y* $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ *existe, entonces* f *es derivable en* c *y*

$$f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x).$$

Y en cuanto a la notación, escribiremos $\operatorname{sen}^2(x)$ en vez de $(\operatorname{sen}(x))^2$ y $\cos^2(x)$ en vez de $(\cos(x))^2$. Debemos notar que $\operatorname{sen}^2(x) \neq \operatorname{sen}(x^2)$ y $\cos^2(x) \neq \cos(x^2)$.

Teorema 8 *Las funciones* $\cos, \operatorname{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfacen para cada* $x \in \mathbb{R}$:

(1) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

(2) $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

(3) $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Mostraremos únicamente los incisos (1) y (2), pues el inciso (3) es muy similar a (2).

(1) Si $x \in [0,\pi]$, tenemos, por la Definición 2, que $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$, así que

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Ahora, si $x \in [\pi, 2\pi]$, tenemos, por la Definición 4, que $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$ y $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$, pero note que en este caso $2\pi - x \in [0,\pi]$, por lo que $\operatorname{sen}^2(2\pi - x) + \cos^2(2\pi - x) = 1$, es decir

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1.$$

Finalmente, si $x \in (-\infty, 0) \cup (2\pi, \infty)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ y $x' \in [0, 2\pi]$ de tal manera que $x = 2\pi k + x'$, así, por la Definición 4, tenemos que $\cos(x) = \cos(x')$ y $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x')$, pero $x' \in [0, 2\pi]$, así que $\cos^2(x') + \operatorname{sen}^2(x') = 1$. Esto es,

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

(2) Ya hemos visto, en el Teorema 3, que $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ para cada $x \in (0, \pi)$. Consideremos ahora $x \in (\pi, 2\pi)$. Se tiene, por la Definición 4, que $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$, es decir, en este caso la función cos es una composición de funciones derivables, por lo que resulta derivable y

$$\cos'(x) = [\cos(2\pi - x)]' = -\operatorname{sen}(2\pi - x)(-1) = \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen}(x),$$

donde la última igualdad se tiene por la Definición 4.
Ahora, si $x = 2\pi k + x'$, para algún $k \in \mathbb{Z}$ y $x' \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, tenemos, por la Definición 4, que $\cos(x) = \cos(x')$, es decir, $\cos(x) = \cos(x - 2\pi k)$. En este caso también se tiene que la función cos es una composición de funciones derivables, por lo que resulta derivable y

$$\cos'(x) = [\cos(x - 2\pi k)]' = -\operatorname{sen}(x - 2\pi k)(1) = -\operatorname{sen}(x - 2\pi k) = -\operatorname{sen}(x') = -\operatorname{sen}(x).$$

Note que de los tres casos anteriores podemos concluir que cos es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Finalmente, consideremos $c = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene que cos es derivable en $(c - \pi, c + \pi) \setminus \{c\}$ y $\lim\limits_{x \to c} \cos'(x) = \lim\limits_{x \to c} (-\operatorname{sen}(x)) = -\operatorname{sen}(c)$, pues sen es continua en $\mathbb{R}$. Así, por la Proposición 7, tenemos que cos es derivable en c y

$$\cos'(c) = \lim_{x \to c} \cos'(x) = -\operatorname{sen}(c).$$

Concluimos que cos es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$