Última actualización: 3 de noviembre de 2021

Clase 15

Para esta sesión es necesario recordar el siguiente teorema:

Teorema 1 (Teorema de la Función Inversa) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en $[a, b]$, y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(y)$, con derivada $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en y, y*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Como seguramente recordarán, las funciones trigonométricas no son inyectivas en sus dominios, por lo que no existen las funciones inversas de las funciones trigonométricas como tal, pero si restringimos el dominio de las funciones trigonométricas a los intervalos de mayor longitud donde estas sí son inyectivas, tendría sentido pensar en las funciones inversas.

Las "Funciones Inversas" de las Funciones Trigonométricas

Definición 2 *Sean $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por*

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad g(x) = \cos(x) \quad y \quad h(x) = \tan(x).$$

Las funciones f, g y h son funciones inyectivas en su dominio, por lo que tiene sentido considerar $f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Estas funciones las llamaremos arcoseno, arcocoseno y arcotangente y las denotaremos por $\operatorname{arc\,sen}$, $\arccos$ *y* $\arctan$ *respectivamente (vea figura 1).*

Observación 3 *Las funciones f, g y h de la definición anterior NO son las funciones trigonométricas (recuerde que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de correspondencia), pero, a pesar de esto, es común llamar a f^{-1}, g^{-1} y a h^{-1}, es decir, a arcoseno, arcocoseno y arcotangente las funciones inversas de las funciones trigonométricas, y en este curso esto no será la excepción.*

Teorema 4 *(1) Las funciones* $\arccos$ *y* $\operatorname{arc\,sen}$ *son derivables en $(-1, 1)$ y*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad y \qquad \operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

(2) La función $\arctan$ *es derivable en todo $\mathbb{R}$ y*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

(1) Solo demostraremos que arc cos es derivable, pues la demostración para arc sen es totalmente análoga.
Se tiene que la función g de la Definición 2 es derivable en $(0,\pi)$ y $g'(y) = -\operatorname{sen}(y) \neq 0$ para cada $y \in (0,\pi)$. Así, por el Teorema 1, g^{-1} es derivable en $(-1,1)$ y

$$\operatorname{arc\,cos}'(x) = \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,cos}(x)\right)},$$

para cada $x \in (-1,1)$. Ahora, dado que $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, y por la definición de arc cos, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,cos}(x)\right) + \cos^2\left(\operatorname{arc\,cos}(x)\right) \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,cos}(x)\right) + \left(\cos(\operatorname{arc\,cos}(x))\right)^2 \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,cos}(x)\right) + x^2. \end{aligned}$$

para cada $x \in (-1,1)$. De esto último se sigue que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{arc\,cos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para cada $x \in (-1,1)$.

(2) La función h de la Definición 2 es derivable en $(-\pi/2,\pi/2)$ y $h'(y) = \sec^2(y) \neq 0$ para cada $y \in (-\pi/2,\pi/2)$. Así, por el Teorema 1, h^{-1} es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$\arctan'(x) = \left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\sec^2\left(\arctan(x)\right)},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Luego, usando una vez más que $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$1 = \operatorname{sen}^2\left(\arctan(x)\right) + \cos^2\left(\arctan(x)\right)$$

y dividiendo esta última igualdad por $\cos^2(\arctan(x)) \neq 0$ y usando la definición de arctan, tenemos que

$$\begin{aligned} \sec^2(\arctan(x)) &= \tan^2\left(\arctan(x)\right) + 1 \\ &= \left(\tan(\arctan(x))\right)^2 + 1 \\ &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. De donde

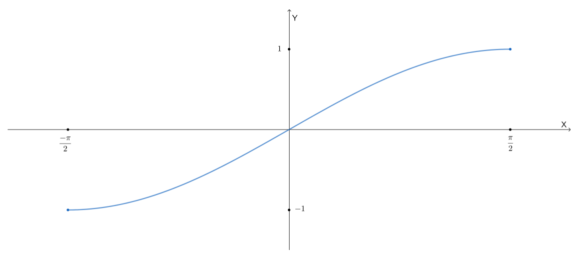
$$\sec^2(\arctan(x)) = 1 + x^2.$$

Por lo tanto,

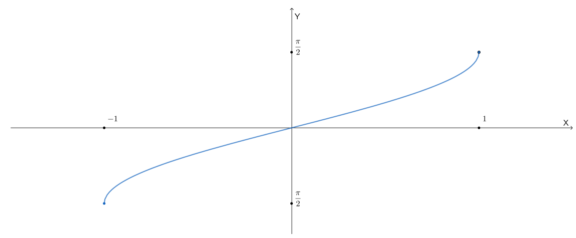
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

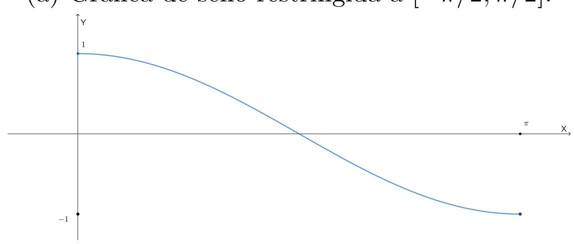
■



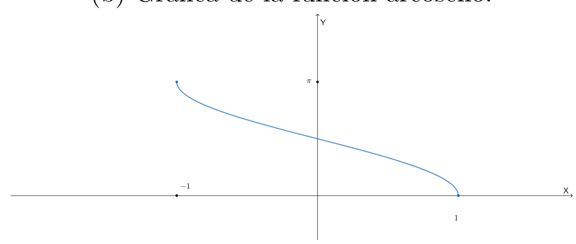
(a) Gráfica de seno restringida a $[-\pi/2, \pi/2]$.



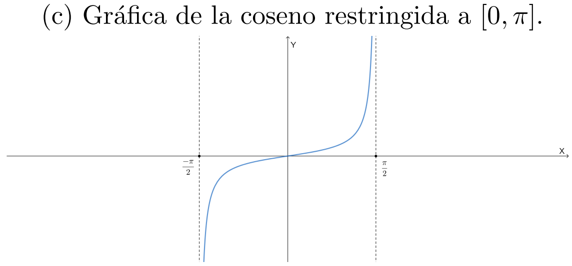
(b) Gráfica de la función arcoseno.



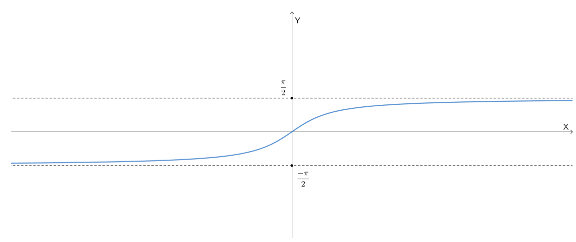
(c) Gráfica de la coseno restringida a $[0, \pi]$.



(d) Gráfica de la función arcocoseno.



(e) Gráfica de la tangente restringida a $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.



(f) Gráfica de la función arcotangente.

Figura 1: Gráficas de las funciones trigonométricas y sus respectivas “funciones inversas”.