Última actualización: 8 de noviembre de 2021

Clase 16

La clase anterior demostramos los siguientes resulltados:

Lema 1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Si*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b, \end{aligned}$$

entonces $f(x) = b \operatorname{sen}(x) + a\cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2 *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface que*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) \qquad y \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

En esta sesión aplicaremos los resultados mencionados anteriormente para obtener/justificar afirmaciones que ya conociamos sobre las funciones trigonométricas.

Algunos resultados sobre las funciones trigonométricas

Recuerde que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **función par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y es llamada **función impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 3 *La función* cos *es una función par mientras que la función* sen *es una función impar.*

Demostración. Mostraremos solo la primera afirmación y la otra quedá como tarea. Debemos demostrar que $\cos(-x) = \cos(x)$ para todo número real x.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la siguiente regla de correspondencia

$$f(x) = \cos(-x) - \cos(x).$$

Note que la función f es dos veces derivable pues es diferencia de dos funciones dos veces derivables ($\cos(-x)$ es una composición de funciones dos veces derivables) y para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f'(x) = \operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -\cos(-x) + \cos(x).$$

Observe que $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ y que $f'(0) = 0$. Así, por el Lema 1, se tiene que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Se sigue que

$$\cos(-x) = \cos(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, esto es, cos es una función par. ■

Ejemplo 4 *Halle, usando el Teorema 2, una fórmula para $\cos(2\alpha)$ y utilice esta fórmula para hallar el valor de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.*

Solución. Por el Teorema 2, sabemos que

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha).$$

Por otro lado, sabemos que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \left[1 - \cos^2(\alpha)\right] = 2\cos^2(\alpha) - 1. \tag{1}$$

Note también que

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \left[1 - \operatorname{sen}^2(x)\right] - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x). \tag{2}$$

Ahora, sabemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, por lo que, de (1), se tiene que

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

luego,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pero, $\cos(x) > 0$, para todo $x \in (0, \pi/2)$ y $\pi/4 \in (0, \pi/2)$, por lo que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por otro lado, de (2), se tiene que

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

y de aquí que

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Como $\operatorname{sen}(x) > 0$, para todo $x \in (0, \pi/2)$ y $\pi/4 \in (0, \pi/2)$, se sigue que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, tenemos que

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

■

Ejemplo 5 *Sean $a < b$ dos números reales. Halle las siguientes integrales*

$$\int_a^b \cos^2(t)\ dt \quad y \quad \int_a^b \operatorname{sen}^2(t)\ dt.$$

Solución. De las identidades (1) y (2) se tiene que

$$\int_a^b \cos^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_a^b (1+\cos(2t))\, dt$$

y que

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_a^b (1-\cos(2t))\, dt.$$

Consideremos ahora las funciones $f(t) = 1+\cos(2t)$ y $h(t) = 1-\cos(2t)$. Se tiene que las funciones $g(t) = t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$ y $j(t) = t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$ cumplen que $g' = f$ y $j' = h$, por lo que, del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_a^b (1+\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(g(b)-g(a)\right) = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}(2b) - sen(2a)\right)$$

y que

$$\frac{1}{2}\int_a^b (1-\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b h(t)\ dt = \frac{1}{2}\left(j(b)-j(a)\right) = \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}(2b) - sen(2a)\right).$$

■