Ayudantía 12
Teoremas de cambio de variable en límites

A continuación se enunciarán y demostrarán algunos resultados acerca de límites que se usan frecuentemente para calcular límites que involucran a la función exponencial o a la función logaritmo, pero que deben utilizarse con cuidado pues no siempre se verifican todas las hipótesis y hacer los *cambios de variable* puede llevar a resultados erróneos.

Teorema 1. *Supogamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = k$ *con* $k \in \mathbb{R}$ *y que* g *es una función continua en* k*, entonces*

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = g(k).$$

El resultado sigue siendo cierto si cambiamos a *por* $-\infty$ *o por* ∞*.*

ATENCIÓN: El resultado anterior, cuando todas las hipótesis se cumplen, suele escribirse (incorrectamente) como

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Insistimos en que lo anterior es incorrecto, pero como pertenece al folklor, lo presentamos.

Demostración (Teorema 1). Primero haremos la prueba cuando x tiende a a. La demostración se obtiene usando la definición de límite. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que g es continua en k, por definición de continuidad existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x-k| < \delta_1$, entonces $|g(x)-g(k)| < \varepsilon$. Ahora, ya que $\lim_{x\to a} f(x) = k$, para $\delta_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-k| < \delta_1$. Así, si x cumple que $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-k| < \delta_1$ y por lo tanto, $|g(f(x)) - g(k)| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(k)$.

Haremos el caso cuando x tiende a infinito. El caso cuando x tiende a menos infinito es análogo. Así, supongamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ y que g es continua en k. Queremos demostrar que $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = g(k)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en k, por definición de continuidad existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x-k| < \delta_1$, entonces $|g(x)-g(k)| < \varepsilon$. Ya que $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, para $\delta_1 > 0$ existe $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $|f(x)-k| < \delta_1$. Por lo tanto, si x cumple que $x > M$, entonces $|f(x)-k| < \delta_1$, por lo cual $|g(f(x)) - g(k)| < \varepsilon$. En conclusión, $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = k$. ∎

La siguiente pregunta natural es: ¿qué pasa cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$? Claramente NO tiene sentido la expresión $g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ porque el símbolo ∞ no representa ningún número y nuestras funciones están definidas sobre los números reales. Por esto, es preferible escribir $\lim_{t\to\infty} g(t)$.

¿Cuándo SÍ podemos hacer los *cambios de variable*? Aunque no hay criterios generales, a continuación damos algunos resultados en ese sentido.

Teorema 2. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{t\to\infty} g(t) = k$*, donde* $k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*, entonces*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = k.$$

El resultado sigue siendo cierto si cambiamos a *por* $-\infty$ *o por* ∞*.*

Demostración. Únicamente haremos las pruebas para cuando x tiende a a. Las pruebas para cuando x tiende a infinito o a menos infinito son análogas.

Supongamos que $\lim_{t\to\infty} g(t) = k$ con $k \in \mathbb{R}$. Veamos que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = k$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis sobre g existe $M_1 > 0$ tal que si $t > M_1$ entonces $|g(t) - k| < \varepsilon$. Ya que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, para $M_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M_1$. Así, si x cumple que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M_1$ y por ello $|g(f(x)) - k| < \varepsilon$. Por lo tanto, por definición de límite se cumple que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = k$.

Ahora, supongamos que $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. El caso donde el límite es menos infinito es análogo. Veamos que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \infty$. Sea $N > 0$. Por la hipótesis sobre g existe $M_1 > 0$ tal que si $t > M_1$ entonces $g(t) > N$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, para $M_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > M_1$. Finalmente, si x cumple que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M_1$ y por ello $g(f(x)) > N$. En conclusión, por la definición de límite, se tiene que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \infty$. ∎

ATENCIÓN. El recíproco del resultado anterior es FALSO como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Existen funciones f y g tales que g es continua en $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(f(x))$ existe pero $\lim_{t\to\infty} g(t)$ NO existe.

Demostración. Consideremos las funciones f y g definidas por $f(x) = \lfloor x \rfloor \pi$ y $g(t) = \operatorname{sen}(t)$. Notemos que

$$g(f(x)) = g(\lfloor x \rfloor \pi) = \operatorname{sen}(\lfloor x \rfloor \pi) = 0$$

para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo cual $\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = 0$. También, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ pero $\lim_{t\to\infty} g(t)$ NO existe. ∎

A pesar de lo anterior, es posible dar algunos recíprocos parciales.

Teorema 4. *Sean f, g funciones tales que*

(i). $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *y*

(ii). para toda $\delta > 0$ existe $M_\delta > 0$ tal que $(M_\delta, \infty) \subset f((a - \delta, a) \cup (a, a + \delta))$.

Si $\lim_{x\to a} g(f(x)) = k$, con $k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, entonces $\lim_{t\to\infty} g(t) = k$.

Demostración. Solo haremos el caso en que $k \in \mathbb{R}$, los otros dos casos son análogos. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, se sigue que $|g(f(x)) - k| < \varepsilon$. Por (ii), existe M_δ tal que si $t > M_\delta$, entonces existe $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ tal que $f(x) = t$. Ahora, si $M = M_\delta$, para toda $t > M$ se cumple que existe x con $0 < |x - a| < \delta$ tal que $g(t) = g(f(x))$, por lo cual,

$$|g(t) - k| = |g(f(x)) - k| < \varepsilon.$$

Así, por definición de límite se tiene que $\lim_{t\to\infty} g(t) = k$. ∎

Observación 5. El Teorema 4 sigue siendo cierto si a se cambia por $-\infty$ o por ∞ y modificando la condición (ii) adecuadamente[1].

[1] ¿Puede enunciar correctamente los enunciados de dichos resultados?

Corolario 6. *Sean f, g funciones tales que* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = k$, *con* $k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Si f es continua en una* vecindad pinchada $(a - \delta_f, a + \delta_f) \setminus \{a\}$ *de a, entonces* $\lim_{t\to\infty} g(t) = k$.

Demostración. Ya que f es continua en $\left(a - \delta_f, a + \delta_f\right) \setminus \{a\}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces se cumple la condición (ii) del Teorema 4. Como también se cumple la condición (i) y $\lim_{x\to a} g(f(x)) = k$, entonces por el Teorema 4 obtenemos que $\lim_{t\to\infty} g(t) = k$. ∎

Observación 7. Note que en el corolario anterior basta pedir que f sea continua en un intervalo de la forma $(a - \delta, a)$ o en un intervalo de la forma $(a, a + \delta)$.