Ayudantía 13
Límites y derivación logarítimica

Ejercicio 1. *Calcule los siguientes límites.*

(i). $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^2}$ *(ii).* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^2}$

Demostración. La idea de solución de este problema sigue las mismas pautas que el **Ejercicio 3** de la **Ayudantía 09** sobre funciones trigonométricas: aplicaremos la regla de L'Hôpital cuando se cumplan las hipótesis.

(i) Sean $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ y $g(x) = x^2$. Observamos que f y g son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$. Notamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$, y como f y g son funciones derivables, podemos intentar aplicar la regla de L'Hôpital. Pero $f'(x) = e^x - 1 - x$ y $g'(x) = 2x$ también cumplen que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$, y ya que f' y g' siguen siendo derivables, tiene sentido intentar nuevamente resolver el límite mediante la regla de L'Hôpital. Tenemos que $f''(x) = e^x - 1$ y $g''(x) = 2$, y además

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.$$

Así, por el Teorema de L'Hôpital se obtiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0.$$

Finalmente, una vez más, por el Teorema de L'Hôpital obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

(ii) Desarrollaremos este inciso como se hace "normalmente": procedemos a derivar en cada paso, verificando (¿mentalmente?) que los límites de las funciones numerado y denominador son cero y que las funciones que aparecen son derivables para que a partir de la última igualdad se puedan obtener todas las anteriores, cada una de ellas justificada por la regla de L'Hôpital (como se vio en el inciso anterior). Por lo anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Así que por la regla de L'Hôpital aplicada dos veces, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0.$$

■

Lema 2 (Derivación logarítmica)**.** *Sea f una función derivable. Entonces* $(\log\circ f)' = \frac{f'}{f}$.

Demostración. Notamos que por la regla de la cadena se tiene que

$$(\log\circ f)'(x) = (\log)'(f(x))f'(x) = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'}{f}(x).$$

Esto prueba lo deseado. ■

¿Qué hipótesis adicionales se están considerando en el Lema anterior, pero no se mencionan explícitamente?

Ejercicio 3. *Calcule la derivada de las siguientes funciones.*

(i). $f(x) = (1+x)\left(1+e^{x^2}\right)$

(ii). $f(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}}x^2}{(1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}}$

Demostración. (i) Tenemos que

$$\log(f(x)) = \log\left((1+x)\left(1+e^{x^2}\right)\right) = \log(1+x) + \log\left(1+e^{x^2}\right).$$

Entonces, al derivar la composición anterior y aplicar el Lema 2 de derivación logarítmica obtenemos lo siguiente:

$$(\log\circ f)'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Finalmente, al despejar f' obtenemos que

$$f'(x) = (1+x)\left(1+e^{x^2}\right)\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\right).$$

(ii) Notamos que

$$\begin{aligned}
\log(f(x)) &= \log\left((3-x)^{\frac{1}{3}}x^2\right) - \log\left((1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}\right)\\
&= \log\left((3-x)^{\frac{1}{3}}\right) + \log(x^2) - \log(1-x) - \log\left((3+x)^{\frac{2}{3}}\right)\\
&= \frac{1}{3}\log(3-x) + 2\log(x) - \log(1-x) - \frac{2}{3}\log(3+x)
\end{aligned}$$

Luego, al derivar y usar el lema de derivación logarítmica obtenemos que

$$\begin{aligned}
(\log\circ f)'(x) &= \frac{1}{3}\frac{-1}{3-x} + 2\frac{1}{x} - \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{3}\frac{1}{3+x}\\
&= \frac{2}{x} - \frac{1}{3(3-x)} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{3(3+x)}\\
&= \frac{f'(x)}{f(x)}.
\end{aligned}$$

Así, al despejar $f'(x)$ obtenemos que

$$f'(x) = \frac{(3-x)^{\frac{1}{3}}x^2}{(1-x)(3+x)^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{3(3-x)} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{3(3+x)}\right)$$

∎

El ejemplo anterior ilustra el poder del Lema 2. Si no está convencido de dicho poder, lo invitamos a que calcule las derivadas anteriores haciendo todos los pasos necesarios.

Ejercicio 4. *Halle* $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$ *donde* $f > 0$ *en* $[a, b]$.

Demostración. Por el Lema 2 obtenemos que $(\log \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (aquí estamos usando la hipótesis de que $f > 0$ [¿por qué?]). Finalmente, por el 2o. Teorema Fundamental del Cálculo, se concluye que

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = (\log \circ f)(b) - (\log \circ f)(a).$$

∎