Ayudantía 14
Más límites que involucran la función exponencial

Ejercicio 1. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)}$$

Demostración. Antes de intentar cualquier cálculo, recordemos que por definición se tiene que

$$(\tan(x))^{\tan(2x)} = \exp\left(\tan(2x)\ln\left(\tan(x)\right)\right)$$

Ya que la función exp es continua en $\mathbb{R}$, nos enfocaremos en calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\ln\left(\tan(x)\right).$$

Ya que la expresión anterior no permite aplicar ninguna de las técnicas usuales (principalmente el Teorema de L'Hôpital), escribamos dicha expresión de otra forma:

$$\tan(2x)\ln\left(\tan(x)\right) = \frac{\ln(\tan(x))}{\cot(2x)}.$$

Para continuar, notamos que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln\left(\tan(x)\right) = 0$$

(¿puede decir la razón?) y también

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cot(2x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} = 0,$$

dado que ambas funciones son derivables alrededor de $\frac{\pi}{4}$, calculamos su derivada y vemos que el límite del cociente de sus derivadas es

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)}}{-2\csc^2(2x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}}{-2\csc^2(2x)} \\
&= \frac{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}}{-2} \\
&= \frac{2}{-2} = -1.
\end{aligned}$$

Así, por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\ln\left(\tan(x)\right) = -1.$$

Finalmente, como exp es continua en -1, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{\tan(2x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \exp\left(\tan(2x)\ln\left(\tan(x)\right)\right) \\
&= \exp(-1) = e^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 2. *(i). Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

(ii). Halle $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

(iii). Pruebe que $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

(iv). Pruebe que $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

(v). Demuestre que $\ln(b) = \lim_{x\to\infty} x\left(b^{1/x}-1\right)$.

Demostración. (i) Aunque es tentador usar regla de L'Hôpital, es preferible notar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

donde estamos usando una de las definiciones de derivada.

(ii) Observamos que

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Por el inciso (i) anterior, $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, y como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, por el **Teorema 1** de la **Ayudantía 12** sobre teoremas de cambio de variable en límites obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(iii) Observamos que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Por el inciso anterior sabemos que $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$. Como exp es continua en 1, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) &= \exp(1)\\ &= e\end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(iv) Por el inciso (iii) tenemos que

$$e^a = \left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^a.$$

Pero por la continuidad de "tomar potencias" (note que en realidad es la continuidad de la función exponencial) obtenemos que

$$e^a = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}.$$

Caso 1. Supongamos que $a > 0$. Tenemos que $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a} = \infty$ y ya sabemos que $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{at} = e^a$, así que por el **Teorema 2** de la **Ayudantía 12** obtenemos que

$$e^a = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{a\frac{x}{a}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}.$$

Caso 2. Supongamos que $a < 0$. Entonces $e^a = (e^{-a})^{-1} = \frac{1}{e^{-a}}$. Como $-a > 0$, por el inciso anterior sabemos que

$$e^{-a} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-a}{x}\right)^{x}.$$

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}
e^a = (e^{-a})^{-1} = \frac{1}{e^{-a}} &= \frac{1}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-a}{x}\right)^{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{x}\right)^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-a}{x}\right)^{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-a}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+a}{x-a}\right)^{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{x-a}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{a}
\end{aligned}$$

Ya que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{a} = 1,$$

se sigue que

$$e^a = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^{x-a}.$$

Para concluir, notamos que si $f(x) = x-a$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Si $g(t) = \left(1+\frac{a}{t}\right)^{t}$, la ecuación anterior nos dice que

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = e^a,$$

y como f es continua en $\mathbb{R}$, entonces podemos aplicar la versión correcta del **Teorema 4** (¿puede enunciar dicha versión?) de la **Ayudantía 12**, y por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^{t} = e^a.$$

(v) Sea $f(x) = e^{cx}$, entonces $f'(0) = c$, es decir, si escribimos la definición de dicha derivada

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{cy}-1}{y} = c.$$

Entonces, como $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{c/x} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{c\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = c$$

(¿qué teorema específico se está utilizando?)

Luego, si $c = \ln(b)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \ln(b) &= \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\ln(b)/x} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} x\left(b^{1/x} - 1\right), \end{aligned}$$

$\blacksquare$