Ayudantía 15
Ecuaciones que involucran a la función exponencial

Ejercicio 1. *Demuestre que si* $f(x) = \int_0^x f(t)\ dt$*, entonces* $f = 0$.

Demostración. En primer lugar, notemos que f está definida para toda $x \in \mathbb{R}$. Luego, por definición de f y por el **Teorema 2** de la **Clase 08** obtenemos que f es continua. Además, observamos que, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $f'(x) = f(x)$ para toda x (¿por qué esto es cierto cuando $x < 0$?). En virtud de lo anterior, hemos obtenido que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $f'(x) = f(x)$, así que, por el **Teorema 5** de la **Clase 20**, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ce^x$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Ya que $f(0) = \int_0^0 f(t)\ dt = 0$, entonces $ce^0 = c(1) = 0$, de donde se obtiene que $c = 0$, es decir, $f(x) = 0e^x = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Esto prueba lo deseado. ∎

Ejercicio 2. *Halle todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfacen* $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)\ dt$.

Demostración. Notamos que $\int_0^1 f$ es constante y f es derivable por hipótesis, así que al calcular la segunda derivada obtenemos que $f''(x) = f'(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir, $g'(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ donde $g(x) = f'(x)$. Luego, por el **Teorema 5** de la **Clase 20**, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = ce^x$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Lo anterior implica que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ce^x + a$ (para obtener esto podemos utilizar el teorema de Cálculo Diferencial que dice que si dos funciones tienen la misma derivada, entonces dichas funciones difieren en una constante). Ahora nos abocaremos en determinar a de manera explícita. Por la condición impuesta sobre f, para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned} ce^x &= (ce^x + a) + \int_0^1 \left(ce^t + a\right)\ dt \\ &= ce^x + a + ce - c + a \\ &= ce^x + ce - c + 2a \end{aligned}$$

de donde $2a = c - ce = c(1 - e)$, es decir, $a = \frac{c(1-e)}{2}$.

Por lo tanto, la familia de funciones que se busca es $\{f_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ donde $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f_c(x) = ce^x + \frac{c(1-e)}{2}.$$

∎

Ejercicio 3. *Sean $f,\ g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas con $g \geq 0$. Supongamos que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in [a,b]$ se cumple*

$$f(x) \leq C + \int_a^x fg.$$

Demuestre la desigualdad de Gronwall*: para toda $x \in [a,b]$ se cumple que*

$$f(x) \leq C \exp\left(\int_a^x g\right).$$

Demostración. Definamos la función $G(x) = -\int_a^x g$. Consideremos la función $h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \left(C + \int_a^x fg\right) \exp(G(x)).$$

Ahora, al derivar h obtenemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(C + \int_a^x fg\right) G'(x) \exp(G(x)) + \exp(G(x))\,(fg)\,(x) \\ &= -g(x) \exp(G(x)) \left(C + \int_a^x fg\right) + g(x) \exp(G(x)) f(x) \\ &= g(x) \exp(G(x)) \left(f(x) - \left(C + \int_a^x fg\right)\right) \end{aligned}$$

Por las hipótesis para toda $x \in [a,b]$ se cumple que $g(x) \geq 0$ y $f(x) - \left(C + \int_a^x fg\right) \leq 0$. Ya que $\exp\left(G(x)\right) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$ por las propiedades de la función exponencial, concluimos que para toda $x \in [a,b]$ se cumple que

$$h'(x) = g(x) \exp(G(x)) \left(f(x) - \left(C + \int_a^x fg\right)\right) \leq 0,$$

lo cual implica que h es decreciente, es decir, si $x < y$ se cumple que $h(x) \geq h(y)$ para cualesquiera $x,\ y \in [a,b]$. En particular, al fijar a, se cumple que $h(a) \geq h(x)$ para toda $x \in [a,b]$, esto es

$$\begin{aligned} h(a) = C &= \left(C + \int_a^a fg\right) \exp\left(-\int_a^a g\right) \\ &\geq \left(C + \int_a^x fg\right) \exp(G(x)) = h(x) \\ &= \left(C + \int_a^x fg\right) \exp\left(-\int_a^x g\right) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$C \geq \left(C + \int_a^x fg\right) \exp\left(-\int_a^x g\right),$$

y esto implica que

$$C\exp\left(\int_a^x g\right) \geq C + \int_a^x fg.$$

Finalmente, al aplicar la hipótesis del enunciado, obtenemos que

$$f(x) \leq C + \int_a^x fg \leq C\exp\left(\int_a^x g\right),$$

es decir,

$$f(x) \leq C\exp\left(\int_a^x g\right).$$

Esto prueba lo deseado. ■

Ejercicio 4. *Pruebe que para toda $a > 0$ existe $c \in [0,1]$ tal que*

$$\int_0^a e^{x^2}\, dx = \frac{c}{a}\left(e^{a^2} - 1\right).$$

Demostración. Definamos la función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(a) = a\int_0^a e^{x^2}\, dx + 1 - e^{a^2}.$$

Así, tenemos que $f(0) = 0$ y también, al calcular la derivada respecto a a obtenemos que

$$f'(a) = \int_0^a e^{x^2}\, dx + ae^{a^2} - 2ae^{a^2} = \int_0^a e^{x^2}\, dx - ae^{a^2}.$$

Observamos que para $a > 0$ se cumple que la expresión anterior siempre es negativa, por lo cual f es estrictamente decreciente en $[0,\infty)$. Por lo tanto, $f(a) < 0$ para toda $a > 0$. Esto implica que para toda $a > 0$ se cumple que

$$\int_0^a e^{x^2}\, dx < \frac{e^{a^2} - 1}{a}.$$

Ya que para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $e^{x^2} > 0$, y la función exponencial es continua, entonces $\int_0^a e^{x^2}\, dx > 0$, así que a partir de la desigualdad anterior, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$\int_0^a e^{x^2}\, dx = \frac{c\left(e^{a^2} - 1\right)}{a}.$$

Esto termina la prueba. ■