Última actualización: 11 de noviembre de 2021

Clase 17

En este capítulo continuaremos utilizando el concepto de integral para definir funciones. En esta ocasión toca el turno a las funciones logaritmo y exponencial.

La Función Logaritmo Natural

¿Recuerda las "leyes de los exponentes"? Seguramente sí, recordemos por qué te las definian así. Comencemos recordando qué era a^n, con $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Pues a^n se definia como

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n-\text{veces}}.$$

De esta manera, teniamos que, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m. \tag{1}$$

¿Y si $n = 0$? Pues definiamos a^0 como

$$a^0 = 1,$$

justo para que se siguiera cumpliendo la ecuación (1). Ahora, si considerabamos $n, m \in \mathbb{Z}$ y deseabamos que se cumpliera la ecuación (1), estabamos obligados a definir, para $n \in \mathbb{N}$, a^{-n}, como

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Pues

$$1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n}.$$

Luego, insistiendo que se cumpliera la ecuación (1), debería suceder que

$$a = a^1 = a^{\frac{n}{n}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n} + \cdots \frac{1}{n}}_{n-\text{veces}}} = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{n-\text{veces}}.$$

Así que, debíamos definir $a^{\frac{1}{n}}$ como

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \tag{2}$$

Por lo tanto, para $m, n \in \mathbb{N}$, debería suceder que

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{m-\text{veces}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n} + \cdots \frac{1}{n}}_{m-\text{veces}}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

De aquí que definieramos $a^{\frac{m}{n}}$ como

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

¡Excelente! sabemos que significa a^q con $q \in \mathbb{Q}$. Pero qué ocurre si $q \notin \mathbb{Q}$. No solo eso, seguramente te preguntaras por qué nos definian las "leyes de exponentes" solo para $a > 0$, ¿será para que la ecuación (2) tenga sentido? Bueno, pues en este capítulo resolveremos estas preguntas.

Comencemos notando que una de las cosas que deseamos que se cumplan es la ecuación (1), pero de forma más general, es decir, queremos que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se cumpla que

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y. \tag{3}$$

Pero, como ya hemos visto hasta ahora, la matemática que conociamos no nos era suficiente para este propósito. Entonces usemos nuestros conocimientos de Cálculo. Pongamos la ecuación (3) en términos de una función, es decir, queremos una función f tal que

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \tag{4}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Por supuesto ya habrán notado que la función constante cero satisface la ecuación (4), pero esta función, obviamente, no es la que nos interesa. Agreguemos entonces otra condición a f para que no resulte la constante cero. Supongamos que $f(1) \neq 0$, más aún, supongamos que $f(1) = a > 0$ (sí, aún no aclaramos porqué $a > 0$, pero pronto lo haremos).
Note que, de hallar una función que cumpla (4) y que $f(1) = a$, entonces tendremos que

$$f(r) = (f(1))^r, \tag{5}$$

para cualquier $r \in \mathbb{Q}$. Entonces, nuestra tarea es hallar una función f que cumpla (4) y que

$$f(1) = a. \tag{6}$$

Por supuesto, a estas alturas, nuestra herramienta es más "poderosa". ¿Qué tal si suponemos que una función f satisface (4) y (6) y además es derivable? Bueno, en este caso, tendríamos para cada $x \in \mathbb{R}$ que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

Pero recuerde que, de la ecuación (5) y (6), tenemos que $f(0) = (f(1))^0 = a^0 = 1$. Así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0).$$

Por lo tanto, si denotamos por α a $f'(0)$, es decir, $\alpha = f'(0)$, tendríamos, para cada $x \in \mathbb{R}$, que

$$f'(x) = \alpha f(x).$$

Por supuesto, esto solo nos "pone" la función f' en términos de f, pero seguimos sin conocer a f. Entonces, debemos pensar de otra manera. ¿Qué tal si f, además de satisfacer (4), (6) y ser derivable, es invertible?

En este caso, podríamos aplicar el Teorema de la Función Inversa, por lo que

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\alpha f\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\alpha x}.$$

Pero, como ya lo habrán notado, seguimos con el problema de saber quién es α. ¿Y si suponemos que $\alpha = 1$, es decir, que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x}$? sería lo más natural ¿no?

No solo eso, por el Segundo Teorema Fundamental, también tendríamos que

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = f^{-1}(x) - f^{-1}(1) = f^{-1}(x) - 0 = f^{-1}(x).$$

No hemos hallado la función f que buscabamos, pero en esta busqueda hemos "hallado" una función g tal que $g'(x) = \dfrac{1}{x}$, algo que, hasta ahora, no teníamos, excelente ¿no? Esto merece una definición.

Definición 1 *Definimos la función* ***logaritmo natural*** *como la función* $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Observación 2 *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. $\ln(1) = 0$.
2. *Si* $1 < x$, *entonces* $\ln(x) > 0$.
3. *Si* $0 < x < 1$, *entonces* $\ln(x) < 0$.
4. *Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo,* $\ln$ *es derivable en* $(0, \infty)$ *y*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. *De aquí que* $\ln$ *sea creciente en su dominio.*

Después de estas observacione es posible hacer un esbozo de la gráfica de $\ln$.

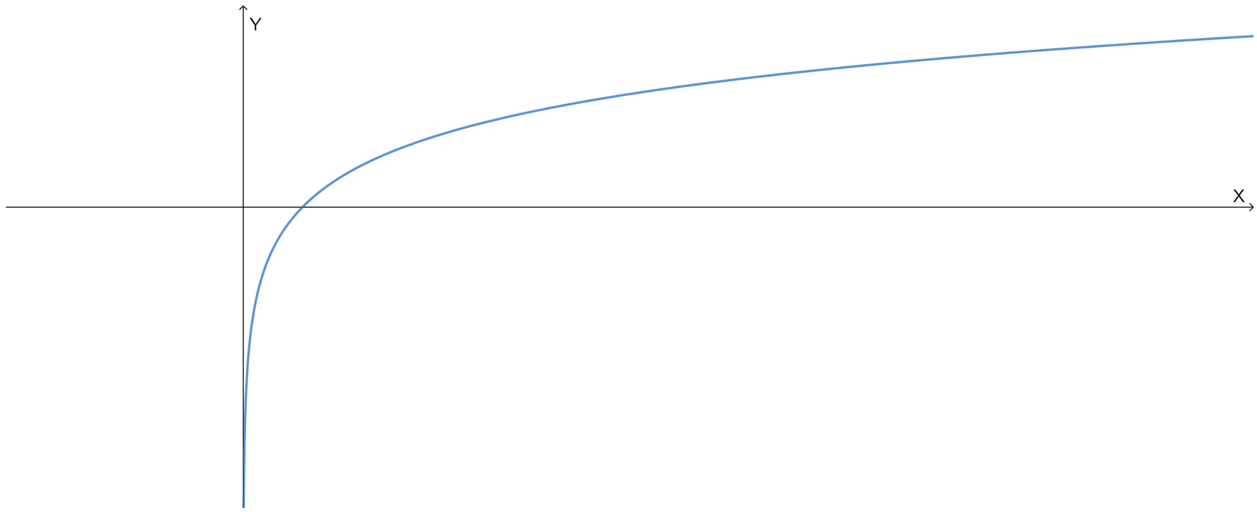

Figura 1: Gráfica de logaritmo natural.