Última actualización: 12 de noviembre de 2021

Clase 18

La clase anterior definimos la función logaritmo natural e hicimos algunas observaciones sobre esta:

Definición 1 *Definimos la función* ***logaritmo natural*** *como la función* $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Observación 2 *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\ln(1) = 0$.

(2) Si $1 < x$, *entonces* $\ln(x) > 0$.

(3) Si $0 < x < 1$, *entonces* $\ln(x) < 0$.

(4) Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, $\ln$ *es derivable en* $(0, \infty)$ *y* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^+$. *De aquí que* $\ln$ *sea creciente en su dominio.*

En esta ocasión enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de la función logaritmo.

Propiedades de la función logaritmo natural

Teorema 3 *Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *se satisface que*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Demostración. Sea y un número positivo arbitrario, pero fijo. Ahora, consideremos la función $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \ln(xy).$$

Note que f es derivable y que

$$f'(x) = \ln'(xy) \cdot y = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

Así, tenemos que $f' = \ln'$, por lo que, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \ln(x) + c,$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}^+$. En particular, si $x = 1$, tenemos que

$$\ln(y) = f(1) = \ln(1) + c = 0 + c = c.$$

De aquí que $c = \ln(y)$. Luego,

$$f(x) = \ln(x) + c = \ln(x) + \ln(y),$$

es decir,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

$\blacksquare$

Corolario 4 *Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

Demostración. Demostraremos esta afirmación usando el Principio de Inducción Matemática sobre n.
Sea $x \in \mathbb{R}^+$, por el Teorema 3, se tiene que

$$\ln(x^2) = \ln(x \cdot x) = \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x).$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$, con $n > 2$, y supongamos que

$$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

Por el Teorema 3, se tiene que

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \cdot x) = \ln(x^n) + \ln(x).$$

Luego, usando nuestra hipótesis de inducción, tenemos que

$$\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x).$$

Así, por el Principio de Inducción Matemática, concluimos nuestra demostración. ■

Corolario 5 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Entonces*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Por el Teorema 3, se tiene que

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y).$$

De donde

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

■

Con ayuda de estos corolarios podemos demostrar la siguiente proposición

Proposición 6 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$

Demostración. Consideremos $\ln(2)$, por la Observación 2, se tiene que $\ln(2) > 0$.

(1) Sea $M > 0$. Por la propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{\ln(2)}{M}.$$

Note entonces que

$$M < n\ln(2) = \ln(2^n).$$

Así, si $x > 2^n$, se tiene que

$$\ln(x) > M.$$

Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty.$$

(2) Sea $m < 0$. Una vez más, por la propiedad Arquimediana, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{-\ln(2)}{m}.$$

Entonces,

$$m > -n\ln(2) = \ln(1) - \ln(2^n) = \log\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Así, si $0 < x < \dfrac{1}{2^n}$, se tiene que

$$\ln(x) < m.$$

Esto es,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

$\blacksquare$