Última actualización: 18 de noviembre de 2021

Clase 20

En esta sesión utilizaremos lo siguiente:

Definición 1 *Definimos la función* ***exponencial****, denotada por* $\exp$*, como la función* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $\exp(x) = \ln^{-1}(x)$.

Teorema 2 *Para cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $\exp'(x) = \exp(x)$.

Definición 3 *Definimos el número* ***e*** *como* $e = \exp(1)$.

Definición 4 *Para cualquier número* $x \in \mathbb{R}$ *definimos* $\boldsymbol{e^x}$ *como* $e^x = \exp(x)$.

En esta clase estudiaremos más propiedades de la función exponencial.

Más sobre la función exponencial

Como vimos en el Teorema 2, la función exponencial cumple ser igual a su derivada, pero ¿será la única función que satisface esto?

Teorema 5 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una fiunción derivable en todo* $\mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x).$$

Entonces, existe $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = ce^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

Note que la función g está bien definida pues $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, además es derivable en todo su dominio y

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0,$$

donde la última igualdad se da pues $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esto último se sigue que

$$f(x) = ce^x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Continuamos con el siguiente teorema.

Teorema 6 *Se cumplen las siguientes afirmaciones*

(1) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

(2) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Demostración.

(1) Note lo siguiente, si $0 < x < 1$, entonces $\ln(x) < 0$, de donde

$$\ln(x) < x.$$

Ahora, si $x > 1$, consideremos $P = \{1, x\} \in \mathscr{P}_{[1,x]}$. Luego,

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt < \overline{S}\left(\frac{1}{t}, P\right),$$

es decir,

$$\ln(x) < 1 \cdot (x - 1),$$

de donde,

$$\ln(x) < x.$$

Así, $\ln(x) < x$ y de aquí que $x < e^x$, para todo $x \in (0, \infty)$. Ahora, como $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ se sigue que

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

(2) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x < x_0$ se tiene que $x < \ln(\varepsilon)$. Se sigue que, para cualquier $x < x_0$,

$$e^x < \varepsilon.$$

Esto es,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

■

Otra propiedad muy importante de la función exponencial es el hecho de que "le gana a cualquier polinomio."

Teorema 7 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se satisface que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Demostración. Demostraremos esta afirmación usando inducción matemática. En el Teorema 6 mostramos que para cualquier $x > 0$ se cumple que $e^x > x$. Así,

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right) \cdot e^{\frac{x}{2}} > \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}},$$

para todo $x > 0$. Ahora, otra vez, por el Teorema 6, tenemos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, de donde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Supongamos ahora que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

y demostremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = \infty.$$

Note que

$$\frac{e^x}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{n+1}}}{\frac{x}{n+1}} \right)^{n+1}.$$

Se sigue, utilizando la hipótesis de inducción, que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = \infty.$$

■

La información que nos proporciona este Teorema es el hecho de que la función exponencial crece mucho más rapido que cualquier polinomio.

Ahora sí podemos hacer un esbozo de la gráfica de la función e^x.

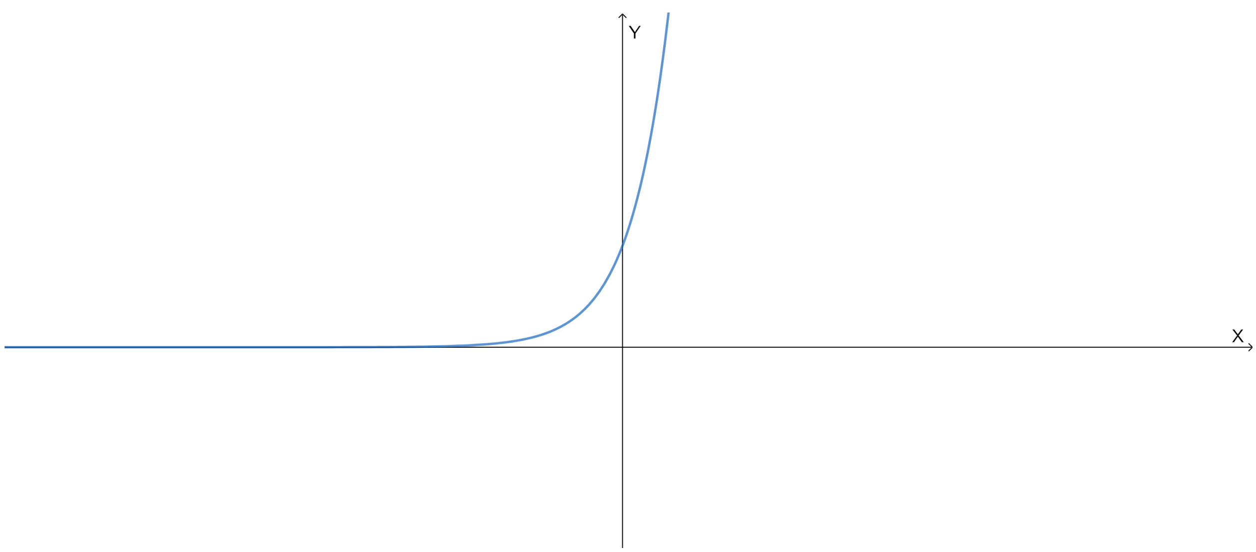

Figura 1: Gráfica de la función exponencial.