

## Clase 21

Recordemos las siguientes definiciones:

**Definición 1** Definimos la función *exponencial*, denotada por  $\exp$ , como la función  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\exp(x) = \ln^{-1}(x)$ .

**Definición 2** Para cualquier número  $x \in \mathbb{R}$  definimos  $e^x$  como  $e^x = \exp(x)$ .

En esta estudiaremos más propiedades de la función exponencial.

### Exponentes y bases de “cualquier” tipo

Note que hasta el momento hemos definido  $e^x$  para cualquier número real  $x$ , pero uno de nuestros propósitos era definir expresiones del tipo  $a^x$  para cualquier  $a > 0$  (¿por qué positivo?) y cualquier número real  $x$ . Ahora podemos hacerlo.

**Definición 3** Sea  $a > 0$ . Definimos, para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a^x$  como

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Ahora queda claro por qué  $a > 0$ . Veamos que se cumplen “las leyes de los exponentes”

**Teorema 4** Sea  $a > 0$ . Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

- (1)  $a^1 = a$ .
- (2)  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ , para cualesquiera  $x, y$ .
- (3)  $(a^b)^c = a^{bc}$ , para cualesquiera  $b, c$ .

**Demostración.**

- (1)  $a^1 = e^{1 \cdot \ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$ .
- (2)  $a^{x+y} = e^{(x+y) \ln(a)} = e^{x \ln(a) + y \ln(a)} = e^{x \ln(a)} \cdot e^{y \ln(a)} = a^x \cdot a^y$ .
- (3)  $(a^b)^c = e^{c \ln(a^b)} = e^{c \ln(e^{b \ln(a)})} = e^{c(b \ln(a))} = e^{cb \ln(a)} = a^{bc}$ .

■

Así como hemos definido  $a^x$  por medio de la función  $e^x$ , también podemos definir  $\log_a$  usando la función  $\ln$ .

**Definición 5** Sea  $a > 0$ . Definimos, para cualquier  $x > 0$ ,  $\log_a(x)$  como

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

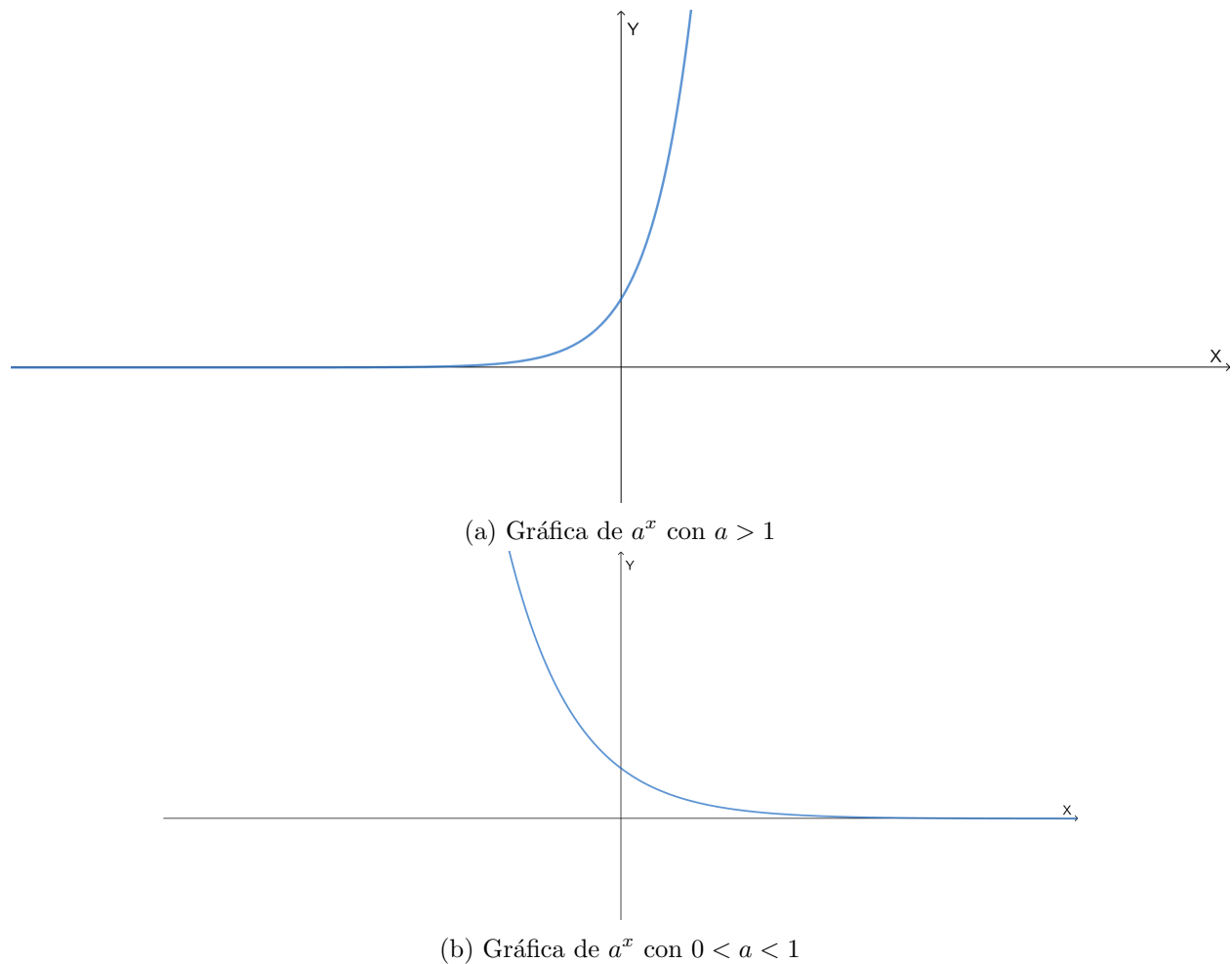


Figura 1

Otra consecuencia de los logros de este capítulo es poder definir  $x^a$  con  $a$  un número real cualquiera.

**Definición 6** Sea  $a \in \mathbb{R}$  Definimos, para cualquier  $x > 0$ ,  $x^a$  como

$$x^a = e^{a \ln(x)}.$$

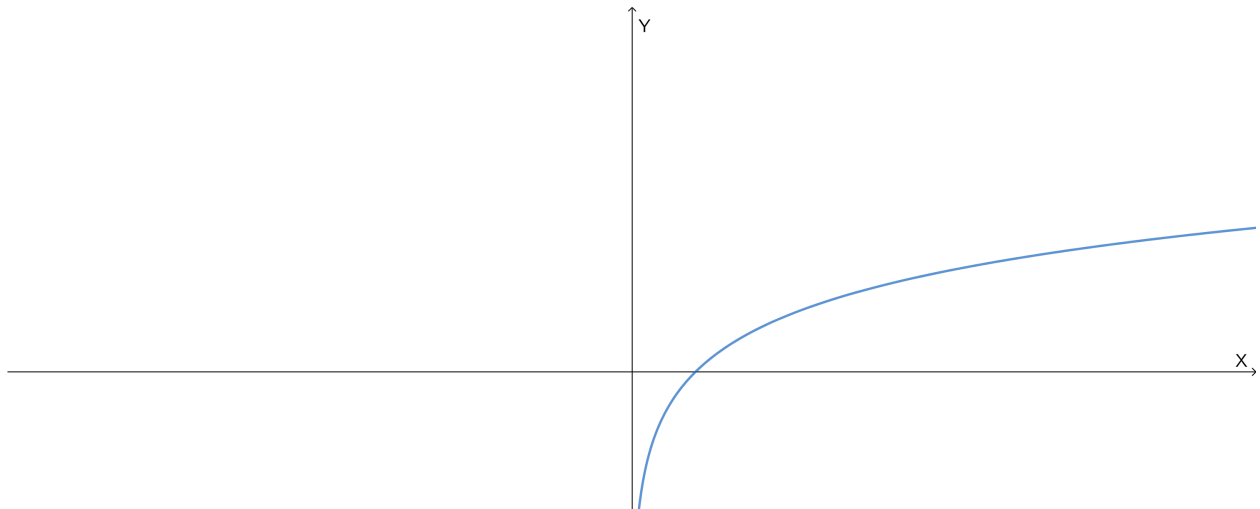
Note que esta definición “extiende” la definición de funciones como  $x^r$  con  $r \in \mathbb{Q}$ . Además, tales funciones son derivables y la derivada es lo que esperabamos.

**Teorema 7** Sean  $a \in \mathbb{R}$  y  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida como

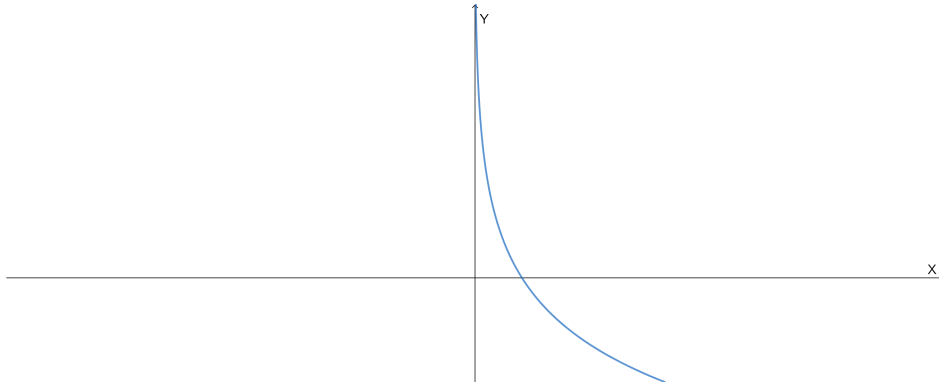
$$f(x) = x^a.$$

Entonces  $f$  es derivable y para cada  $x \in (0, \infty)$  se tiene que

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$



(a) Gráfica de  $\log_a$  con  $a > 1$



(b) Gráfica de  $\log_a$  con  $0 < a < 1$

Figura 2

**Demostración.** Note que  $f$  es una composición de funciones derivables, por lo que resulta derivable, además

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^a)' \\
 &= \left( e^{a \ln(x)} \right)' \\
 &= \frac{a}{x} \left( e^{a \ln(x)} \right) \\
 &= \frac{a}{x} (x^a) \\
 &= ax^{a-1}.
 \end{aligned}$$

■