Última actualización: 25 de noviembre de 2021

Clase 22

En esta ocasión aprovecharemos que ya conocemos a la función exponencial para introducir otras funciones.

Funciones Hiperbólicas

Definición 1 *Definimos las funciones* ***seno hiperbólico****,* ***coseno hiperbólico*** *y* ***tangente hiperbólica****, denotadas por* senh, cosh *y* tanh*, respectivamente, como las funciones* $\operatorname{senh}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\cosh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\tanh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad y \qquad \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}.$$

Teorema 2 *Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

(2) $\tanh^2(x) + \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1$.

(3) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(y)\cosh(x)$.

(4) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$.

(5) $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$.

(6) $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$.

(7) $\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.

Demostración. Solo mostraremos algunos incisos y el resto se quedan como ejercicios.

(1) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] \\
&= \frac{1}{4}[2+2] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

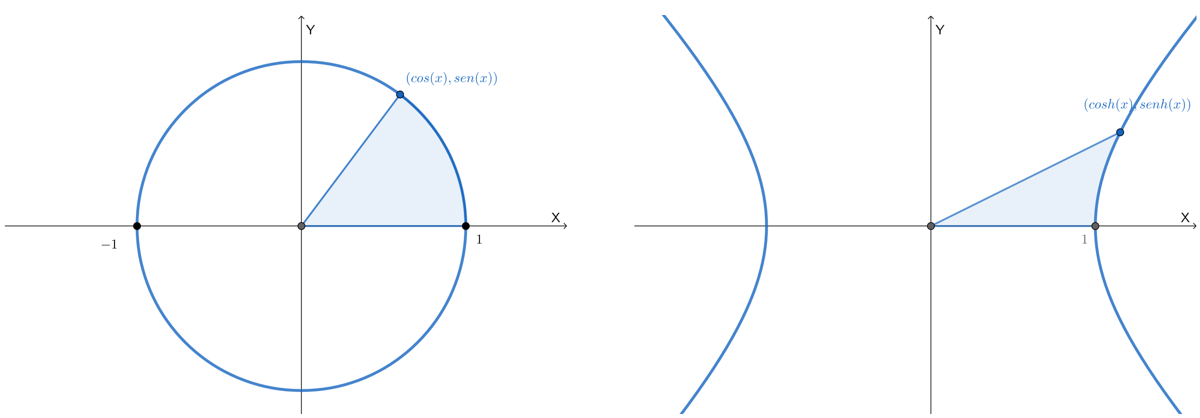
(3) En este inciso conviene desarrollar el lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x)\cosh(y)+\operatorname{senh}(y)\cosh(x) &= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\Big[e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}+\\
&\quad e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}\Big]\\
&= \frac{1}{4}\left[2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}\right]\\
&= \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}\\
&= \operatorname{senh}(x+y).
\end{aligned}$$

(5) Aunque en el enunciado del teorema no pide demostrar que las funciones hiperbólicas son derivables, es preciso comentar que lo son, pues, por definición, se obtienen a partir de operaciones básicas entre funciones derivables. Ahora,

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}'(x) &= \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)'\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\\
&= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\
&= \cosh(x).
\end{aligned}$$

■



(a) Se muestra el conjunto $\{(u,v)\mid u^2+v^2=1\}$. (b) Se muestra el conjunto $\{(u,v)\mid u^2-v^2=1\}$

Figura 1: El punto de coordenadas $(\cos(x),\operatorname{sen}(x))$ determina una sección de la circunferencia de área $\dfrac{x}{2}$, mientras que el punto de coordenadas $(\cosh(x),\operatorname{senh}(x))$ determina una región (la sombreada) de la hipérbola de área $\dfrac{x}{2}$.

Como lo habrán notado en el teorema anterior, las funciones hiperbólicas cumplen propiedades muy similares a las propiedades de las funciones trigonométricas, más aún, el inciso (1), justifica el nombre que se les da a las funciones hipoerbólicas, vea figura 1.

Observación 3 *Note que:*

(1) Dado que $e^y > 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo que el seno hiperbólico es una función creciente en todo su dominio, luego es inyectiva en todo $\mathbb{R}$. Así, existe la función inversa de senh y la denotaremos por senh^{-1}.

(2) Se tiene que $\frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ si y sólo si $e^x - e^{-x} > 0$ y esto ocurre si y sólo si $e^{2x} - 1 > 0$. Luego, $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ si y sólo si $x > 0$. Así, $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) > 0$ si y sólo si $x > 0$. Por lo tanto, $\cosh$ es creciente en $[0, \infty)$ y de aquí que $\cosh$ sea inyectiva en $[0, \infty)$. A la inversa de la función $\cosh$ en $[0, \infty)$ la denotaremos por $\cosh^{-1}$.

(3) Dado que $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\tanh$ es inyectiva en $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\tanh^{-1}$ a la función inversa de $\tanh$.

Teorema 4 *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\operatorname{senh}\left(\cosh^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2 - 1}$, *para cualquier $x \geq 1$.*

(2) $\cosh\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right) = \sqrt{1 + x^2}$, *para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

(3) $\left(\operatorname{senh}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, *para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

(4) $\left(\cosh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, *para culaquier $x > 1$.*

(5) $\left(\tanh^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$, *para cualquier $|x| < 1$.*

Demostración. De manera similar que en el teorema anterior, solo demostraremos algunos incisos, los demás quedan como tarea.

(1) Del inciso (1) del Teorema 2, se tiene que $|\operatorname{senh}(y)| = \sqrt{\cosh^2(y) - 1}$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Ahora, dado que $\operatorname{senh}(y) \geq 0$ si y sólo si $y \geq 0$ (vea inciso (2) de la Observación 3) y $\cosh^{-1}(x) \geq 0$ para toda $x \geq 1$, se tiene que

$$\operatorname{senh}\left(\cosh^{-1}(x)\right) = \left|\operatorname{senh}\left(\cosh^{-1}(x)\right)\right| = \sqrt{\cosh^2\left(\cosh^{-1}(x)\right) - 1}.$$

Pero note que $\cosh^2\left(\cosh^{-1}(x)\right) = \left(\cosh\left(\cosh^{-1}(x)\right)\right)^2 = x^2$, por lo que

$$\operatorname{senh}\left(\cosh^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2 - 1},$$

para toda $x \geq 1$.

(3) Dado que $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, por el Teorema de la Función Inversa, se tiene que senh^{-1} es derivable en todo $\mathbb{R}$ y, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left(\operatorname{senh}^{-1}\right)'(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}'\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\cosh\left(\operatorname{senh}^{-1}(x)\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Note que en la última igualdad hemos usado el iniciso (2) de este teorema.

■

Ejemplo 5 *Sean $a < b$. Halle*

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Solución. Por el inciso (3) del Teorema 4, sabemos que $\left(\operatorname{senh}^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Así, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1}(b) - \operatorname{senh}^{-1}(a).$$

■