Última actualización: 26 de noviembre de 2021

Clase 23

En esta ocasión determinaremos la relación que hay entre los números e^π y π^e, es decir, si son iguales o alguno mayor que el otro.

e^π vs π^e

Ejemplo 1 *Analice la función* $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Solución. Primero note que f es un cociente de dos funciones derivables, por lo que f es derivable y

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2},$$

para cada $x \in (0, \infty)$. Se sigue que $f'(x) > 0$ si y sólo si $1 - \ln(x) > 0$, lo cual ocurre si y sólo si $e > x$. Así, tenemos que f es creciente en $(0, e)$ y decreciente en (e, ∞). Luego, f alcanza su valor máximo en $x = e$.

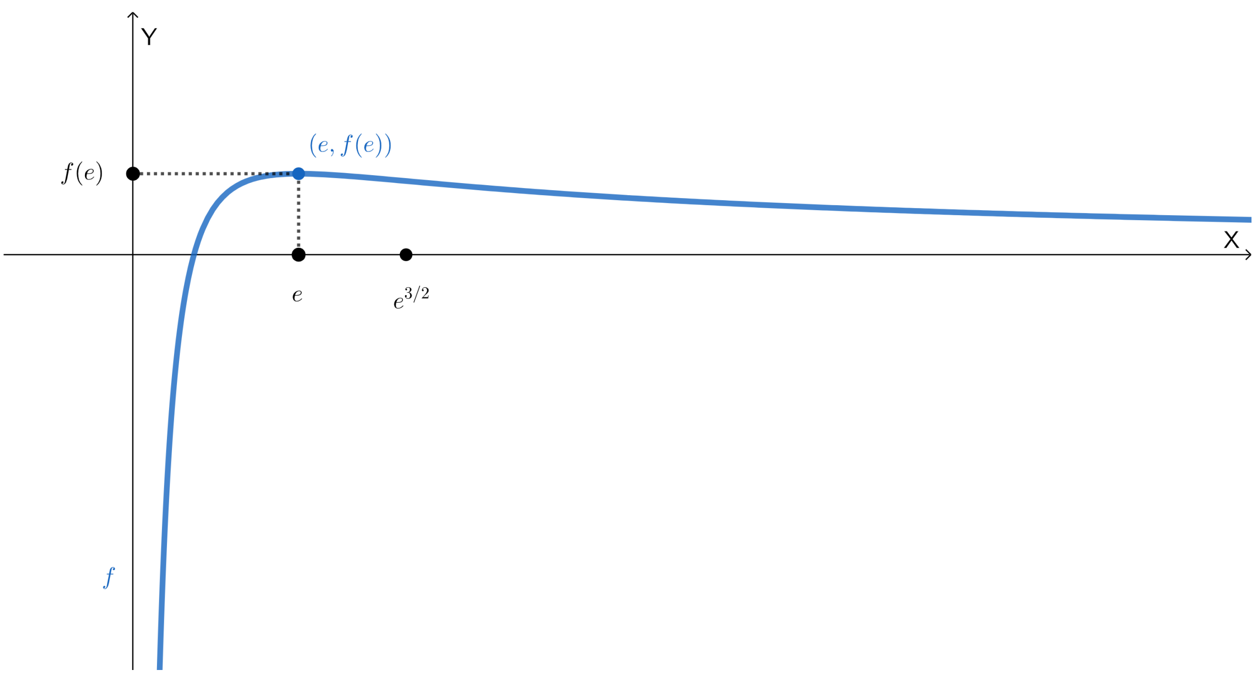

Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Dado que f' es, también, un cociente de funciones derivables, se tiene que f es dos veces derivable y

$$f''(x) = \frac{-x - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln(x)}{x^4},$$

para cada $x \in (0, \infty)$.

De aquí que $f''(x) > 0$ si y sólo si $x(-3 + 2\ln(x)) > 0$ y esto ocurre si y sólo si $\ln(x) > 3/2$, es decir, si y sólo si $x > e^{3/2}$. Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en $(e^{3/2}, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0, e^{3/2})$.

Por otro lado, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$

■

Observación 2 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Note que*

$$\ln\left(x^y\right) = \ln\left(e^{y\ln(x)}\right) = \ln\left(\exp\left(y\ln(x)\right)\right) = y\ln(x).$$

Ejemplo 3 *Determine si $e^\pi < \pi^e$ o $e^\pi = \pi^e$ o $e^\pi > \pi^e$.*

Solución. Consideremos la función f del Ejemplo 1. Como f alcanza su valor máximo en $x = e$, se tiene que $f(e) > f(\pi)$, es decir

$$\frac{\ln(e)}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi},$$

de donde

$$\pi\ln(e) > e\ln(\pi).$$

Luego, por la Observación 2, tenemos que

$$\ln\left(e^\pi\right) > \ln\left(\pi^e\right)$$

y de aquí que

$$e^\pi > \pi^e.$$

■