Ayudantía 16
Área bajo gráficas de funciones integrables (primera parte)

Como ya se vio en las primeras sesiones del curso, una de las motivaciones para el desarrollo del concepto de integral (y de todo el Cálculo Integral en sí) fue el de comprender plenamente a qué nos referimos cuando hablamos del *área* de una figura. Aunque es un objetivo muy atractivo, la herramienta matemática necesaria para una definición precisa de dicho concepto escapa de los alcances de este curso. Sin embargo, no todo está perdido como veremos a continuación.

PRIMER CASO. En primer lugar, para funciones integrables y no negativas, **interpretamos** el valor de la integral como el *área bajo la gráfica de la función*. De manera precisa, si consideramos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces diremos que el *área bajo la gráfica* de f (entre a y b), o también, que el *área entre la gráfica de f y el eje X* (entre a y b), es igual a $\int_a^b f$. Esto se suele escribir como

$$\text{Área} = \int_a^b f.$$

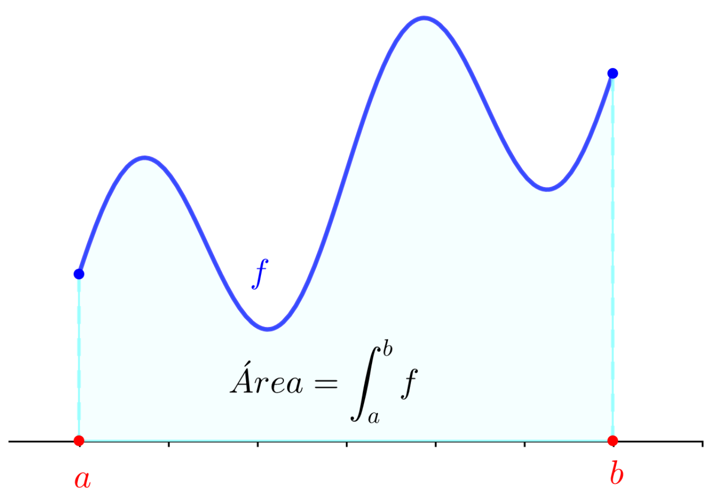

Figura 1: *Área bajo la gráfica* de una función integrable y no negativa.

SEGUNDO CASO. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y no positiva, esto es, si $f(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces la función $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ es no negativa y también es integrable (¿puede decir por qué?), por lo cual, en este caso, **interpretamos** al valor de la integral $\int_a^b |f|$, como el *área entre la gráfica de f y el eje X* (entre a y b). En este caso, podemos escribir

$$\text{Área} = \int_a^b |f|.$$

Observe que podemos decir un poco más. Como $f(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces $|f|(x) = |f(x)| = -f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, de donde, se sigue que

$$\text{Área} = \int_a^b |f| = \int_a^b (-f) = -\int_a^b f.$$

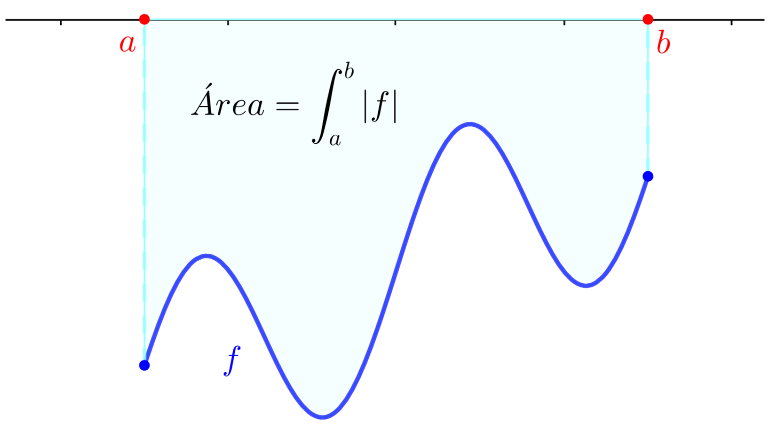

Figura 2: *Área entre la gráfica de una función f integrable y no positiva y el eje X.*

TERCER CASO. Consideremos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable. Ya que puede tomar tanto valores positivos como valores negativos, no es posible aplicar directamente alguno de los dos casos anteriores, sin embargo, hay una manera natural de unirlos. Como la función $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ es no negativa por definición y sigue siendo integrable, **interpretamos** el valor de la integral $\displaystyle\int_a^b |f|$ como el *área entre la gráfica de f y el eje X* (entre a y b). Esto lo podemos escribir como

$$\text{Área} = \int_a^b |f|.$$

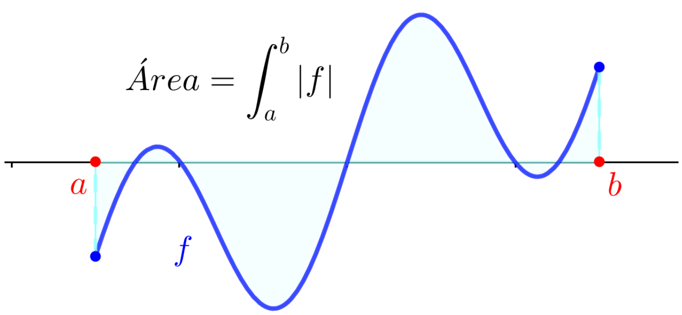

Figura 3: *Área entre la gráfica de una función integrable f y el eje X.*

Note que esta última interpretación resuelve un “problema” acerca de entender el “área bajo la gráfica de una función” cuando *geométricamente* la gráfica no “está por arriba” del eje X.

Ejemplo 1. Si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x^3$, sabemos que $\int_{-1}^{1} f = 0$ porque f es una función impar. Pero esto parece contradecir la intuición que tenemos de área porque "en el dibujo" observamos que "existe área entre la gráfica de f y el eje X", sin embargo, al considerar la función $|f|$ obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} |f|(x)\ dx = 2\int_{0}^{1} |f|(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^3 dx = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

donde la primera igualdad se obtiene porque $|f|$ es una función par. Así, en este ejemplo, Área = $\frac{1}{2}$. ■

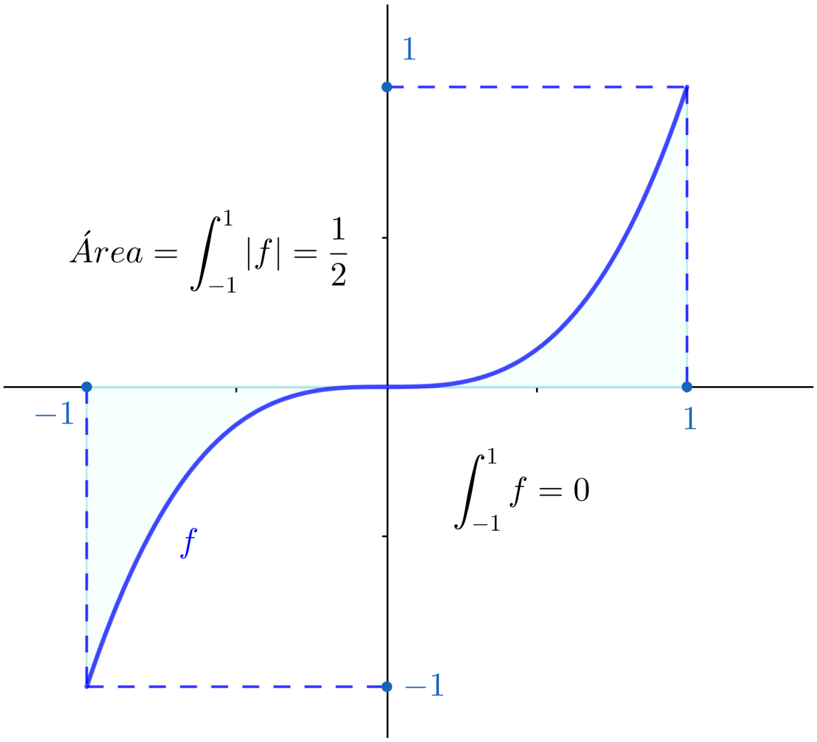

Figura 4: *Área* entre la gráfica de la función $f(x) = x^3$ y el eje X (entre -1 y 1).