Ayudantía 17
Área bajo gráficas de funciones integrables (segunda parte)

En la sesión anterior estudiamos la interpretación de la integral de algunas integrales como un área. En esta ocasión, retomamos otro de los problemas que nos interesan: encontrar el *área entre las gráficas de dos funciones f y g* (integrables) en un intervalo $[a,b]$. Para el planteamiento usual de la solución hay dos cosas a considerar:

(i). Si no está dado el intervalo $[a,b]$ entre el cual se calculará "el área", se debe hallar mediante la solución de la ecuación $f(x)=g(x)$. Esta será la situación habitual, pues nos interesará el área *entre las intersecciones de las gráficas* [1].

(ii). Una vez que se conoce el intervalo $[a,b]$, todo se reduce a calcular la integral de la función $|f-g|$. Esto se hace porque puede ocurrir que $f(x)>g(x)$ para algunos puntos mientras que para otros puede suceder que $f(x)<g(x)$, con lo cual la interpretación geométrica de cual gráfica "está arriba" no es clara (que es algo similar al análisis del CASO 3 de la **Ayudantía 16** anterior).

Así, **interpretamos** al valor de la integral $\int_a^b |f-g|$ como el *área entre las gráficas de las funciones f y g* (en el intervalo $[a,b]$).

Usamos la interpretación anterior para resolver uno de los problemas que intentó resolver Arquímedes, el cual suele ser una motivación para el estudio del Cálculo Integral: dada la gráfica de una parábola, nos interesa calcular el área de ciertos triángulos.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1-x^2$. Observamos que la gráfica de f es una parábola que "abre hacia abajo". Nos interesa calcular el área del triángulo formado al tomar los puntos $(-1,f(-1))$, $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ y la imagen del *punto medio* entre -1 y $\frac{1}{2}$, es decir, el punto $\left(-\frac{1}{4},f\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$. ¿Cómo usar la interpretación anterior para obtener el "área del triángulo? Lo que haremos será definir dos funciones en el intervalo $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ y calcular la integral.

Antes de proceder con las definiciones y cálculos necesarios, observamos que los puntos considerados son explícitamente $(1,f(-1))=(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ y $\left(-\frac{1}{4},f\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\left(-\frac{1}{4},\frac{15}{16}\right)$.

La primera función que definimos será aquella que tiene como gráfica al segmento de recta que une $(-1,0)$ con $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. Para ello, calculamos la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos mediante la forma punto–pendiente como sigue

$$y-0=\frac{0-\frac{3}{4}}{-1-\frac{1}{2}}(x-(-1))=\frac{1}{2}(x+1),$$

por lo cual, definimos $g:\left[-1,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$ como $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)$. Claramente, $g(-1)=0$ y $g(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$, su gráfica es el segmento de recta que nos interesa y g es integrable en $[a,b]$.

La segunda función debe tener por gráfica a la unión de los segmentos que unen a $(-1,0)$ con $\left(-\frac{1}{4},\frac{15}{16}\right)$, y a $\left(-\frac{1}{4},\frac{15}{16}\right)$ con $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. Para ello, construiremos una función por pedazos: ambos serán funciones lineales que tienen como gráfica (en los intervalos respectivos) a los segmentos de recta que nos interesa. Calculamos primero la ecuación de la recta que pasa por $(-1,0)$ y $\left(-\frac{1}{4},\frac{15}{16}\right)$:

$$y-0=\frac{0-\frac{15}{16}}{-1-\left(-\frac{1}{4}\right)}(x-(-1))=\frac{5}{4}(x+1).$$

[1] Esto no es del todo preciso, pero suele llamarse así. La Figura 1 muestra a qué nos referimos en este parte.

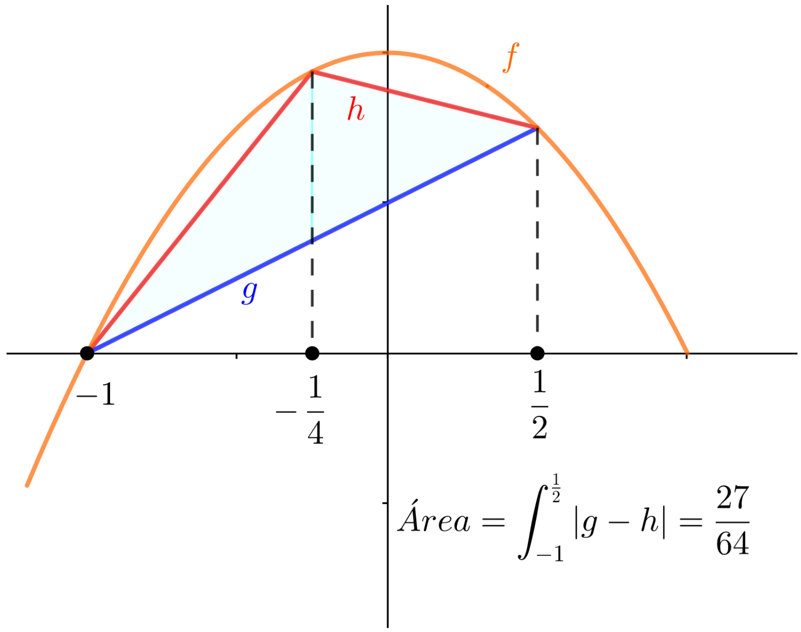

Figura 1: Área entre g y h

Ahora, calculamos la ecuación de la recta que pasa por $\left(-\frac{1}{4}, \frac{15}{16}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$:

$$y - \frac{3}{4} = \frac{\frac{15}{16} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Con base en lo anterior, proponemos $h : \left[-1, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}(x+1) & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} & \text{si } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vemos que $h(-1) = 0$, $h\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16}$, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ y h es continua en $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, lo cual implica que es integrable.

Ahora, calculemos $|g - h|$. Ya que h está definida por partes, es conveniente estudiar $|g - h|$ en los mismos subintervalos que h. Así, primero notamos que si $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$, entonces $h(x) \geq g(x)$, por lo cual $|g - h|(x) = h(x) - g(x) = (h - g)(x)$.

A continuación, si $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, mostraremos que también $h(x) \geq g(x)$. Observamos que $h(x) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4}x$ y $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$, así que basta mostrar que

$$h(x) - g(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x \geq 0,$$

o bien, que

$$\frac{3}{8} \geq \frac{3}{4}x.$$

Como $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$, notamos que para los valores con $x \leq 0$, el resultado es claro, mientras que si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, al multiplicar por $\frac{3}{4}$ obtenemos el resultado deseado. Así, también en este caso se cumple que $|g - h|(x) = h(x) - g(x) = (h - g)(x)$.

Para concluir, hallaremos el área pedida usando la interpretación dada antes:

$$\text{Área(triángulo)} = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |g-h| = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (h-g) = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (h-g) + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (h-g),$$

donde la última igualdad se obtiene porque $h-g$ es integrable. Calculamos cada una de las integrales que aparecen en la expresión anterior. Primero,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (h-g)(x)\ dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{5}{4}(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)\right)\ dx \\ &= \frac{3}{4}\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (x+1)\ dx \\ &= \frac{3}{4}\left[-\frac{15}{32} + \frac{3}{4}\right] \\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{32} = \frac{3}{8}\cdot\frac{9}{16}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (h-g)(x)\ dx &= \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}x\right)\ dx \\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{3}{8}\cdot\frac{9}{16}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Área(triángulo)} = \frac{3}{8}\cdot\frac{9}{16} + \frac{3}{8}\cdot\frac{9}{16} = \frac{27}{64}.$$

Ahora, calculemos el área entre g y f en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Observamos que $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$, así que el área buscada es

$$\begin{aligned}\text{Área(región parabólica)} &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} |f-g| = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (f-g) \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^2 - \frac{1}{2}(x+1)\right)\ dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - x^2\right)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+1\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \frac{3}{8} \\ &= \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

Finalmente, y esta es la razón por la cual se realizaron todos los cálculos anteriores, **Arquímedes conjeturó que el área de una región parabólica es $\frac{4}{3}$ del área de un triángulo que tiene la misma base y el mismo vértice**, y en este caso tenemos que en efecto ocurre, es decir,

$$\frac{4}{3}\text{Área(triángulo)} = \frac{4}{3}\cdot\frac{27}{64} = \frac{9}{16} = \text{Área(región parabólica)}.$$

■