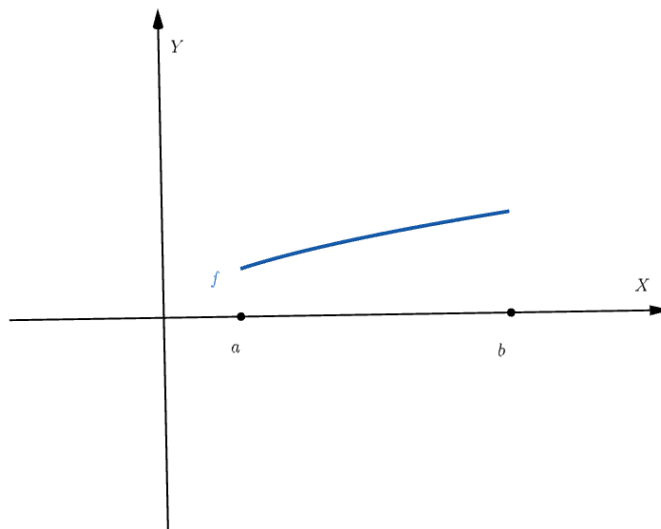


Ayudantía 18

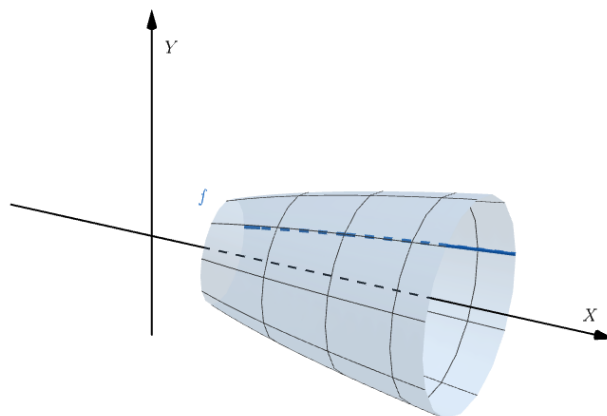
En esta ocasión deduciremos, a partir de la integral, el volumen de algunos sólidos especiales.

La integral y el volumen

Consideremos una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa en $[a, b]$ y supongamos que la gráfica de la función f se gira alrededor del eje X , vea la figura 1. Note que de esta manera obtenemos un sólido.



(a) Gráfica de la función f



(b) Sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje X , la gráfica de f

Figura 1

Ahora, consideremos una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Note que $\pi m_i^2(t_i - t_{i-1})$ es el volumen de un cilindro (disco) situado en el interior del sólido, vea figura 2a mientras que $\pi M_i^2(t_i - t_{i-1})$ es el volumen de un cilindro (disco) que contiene la parte del sólido determinada por t_{i-1} y t_i , vea figura 2b.



(a) t_{i-1} y t_i determinan un cilindro (disco) situado en el interior del sólido.

(b) t_{i-1} y t_i determinan un cilindro (disco) que contiene una parte del sólido.

Figura 2

Así, si denotamos por V al volumen del sólido, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2(t_i - t_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2(t_i - t_{i-1}).$$

Pero note que $\sum_{i=1}^n m_i^2(t_i - t_{i-1}) = \underline{S}(f^2, P)$ y que $\sum_{i=1}^n M_i^2(t_i - t_{i-1}) = \overline{S}(f^2, P)$, así que

$$\pi \underline{S}(f^2, P) \leq V \leq \pi \overline{S}(f^2, P).$$

Como lo anterior sucede para cualquier $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, concluimos que

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Corroboremos lo anterior con un ejemplo bien conocido.

Ejemplo 1 Halle el volumen de una esfera de radio $r > 0$.

Solución. Consideremos la función $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Note que f es continua en $[-r, r]$ y no negativa, además al girar la gráfica de f alrededor del eje X obtenemos una esfera de radio r . Ahora, si denotamos por V al volumen de dicha esfera, se tiene que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r f^2(x) dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Justo el resultado que esperábamos. ■

Hemos obtenido una fórmula para calcular el volumen de sólidos que se obtienen al girar gráficas de funciones, continuas y no negativas, alrededor del eje X , ¿podremos hacer algo similar si giramos la gráfica alrededor del eje Y ? La respuesta es sí.

Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 \leq a < b$ y una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua y no negativa en $[a, b]$, y supongamos que ahora la gráfica de la función f se gira alrededor del eje Y , vea la figura 3.

Si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, entonces cada rectángulo determinado por las sumas inferiores y las sumas superiores induce cilindros “perforados” (capas) de volumen $\pi t_i^2 m_i - \pi t_{i-1}^2 m_i = \pi m_i (t_i^2 - t_{i-1}^2)$ y $\pi t_i^2 M_i - \pi t_{i-1}^2 M_i = \pi M_i (t_i^2 - t_{i-1}^2)$ respectivamente, vea figura 4.

Así, si V denota el volumen del sólido generado al girar la gráfica de f alrededor del eje Y , se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i (t_i^2 - t_{i-1}^2) \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i (t_i^2 - t_{i-1}^2),$$

es decir

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i (t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^n M_i (t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Y ¿estas sumas son sumas inferiores y superiores de alguna función? La respuesta es no. Pero no todo está perdido, pues

$$\sum_{i=1}^n m_i (t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n m_i t_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i t_{i-1} (t_i - t_{i-1})$$

y como f es continua en $[a, b]$, entonces lo es en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, por lo que alcanza su valor máximo y su valor mínimo en cada uno de estos intervalos. En particular, se tiene que $m_i = f(\xi_i)$, para algún $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. De esta manera, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n m_i t_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n m_i t_{i-1} (t_i - t_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \xi_i (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \xi_i (t_i - t_{i-1}).$$

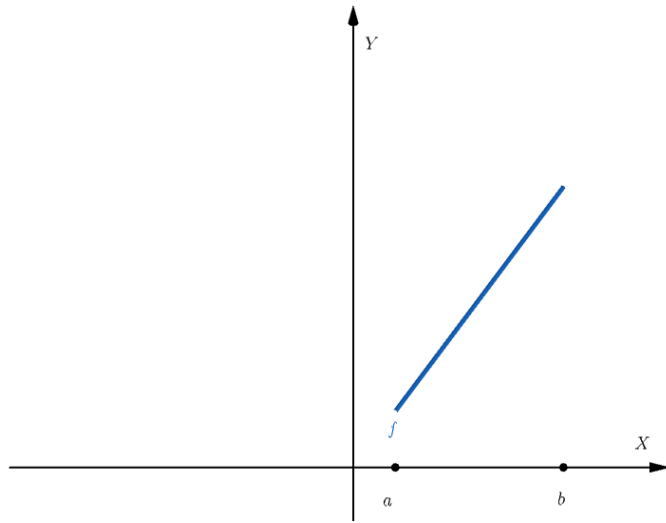
Ahora, note que las sumas de la derecha son sumas de Riemann de la función $xf(x)$ (vea Ayudantía 04), por lo que, para particiones muy finas, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi m_i (t_i^2 - t_{i-1}^2) &= \pi \sum_{i=1}^n m_i t_i (t_i - t_{i-1}) + \pi \sum_{i=1}^n m_i t_{i-1} (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \xi_i (t_i - t_{i-1}) + \pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \xi_i (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \pi \int_a^b xf(x) dx + \pi \int_a^b xf(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b xf(x) dx. \end{aligned}$$

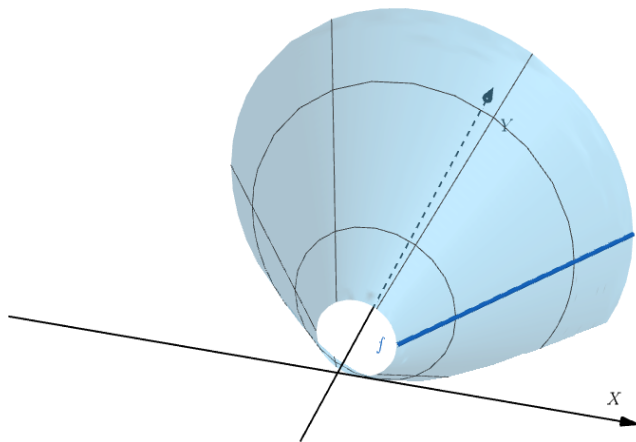
De esta manera, deducimos que

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

Ejemplo 2 Halle el volumen del sólido que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x) = x$, en el intervalo $[0, 1]$, alrededor del eje Y .

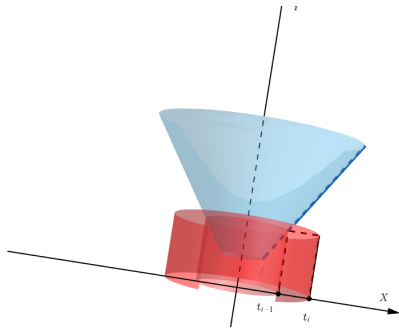


(a) Gráfica de la función f

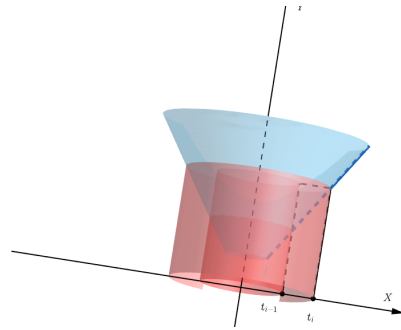


(b) Sólido que se obtiene al girar, alrededor del eje Y , la gráfica de f

Figura 3



(a) t_{i-1} y t_i determinan un cilindro “perforado” de volumen $\pi t_i^2 m_i - \pi t_{i-1}^2 m_i = \pi m_i (t_i^2 - t_{i-1}^2)$



(b) t_{i-1} y t_i determinan un cilindro “perforado” de volumen $\pi t_i^2 M_i - \pi t_{i-1}^2 M_i = \pi M_i (t_i^2 - t_{i-1}^2)$

Figura 4

Solución. Sea V el volumen del sólido que se obtiene al girar la gráfica de la función $f(x) = x$, en el intervalo $[0, 1]$, alrededor del eje Y . Entonces,

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^1 x f(x) dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 x \cdot x dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 x^2 dx \\
 &= 2\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \\
 &= \frac{2}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Es posible que el resultado que esperábamos haya sido $\frac{\pi}{3}$, pero note que el sólido que se obtiene NO es un cono, de hecho es lo que resulta de “quitarle” al cilindro de radio y altura 1 el cono que esperábamos. ■