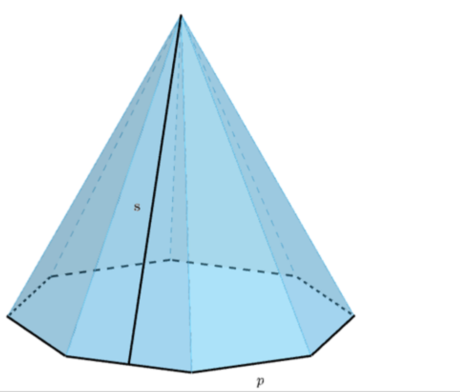
Última actualización: 14 de diciembre de 2021

Ayudantía 19

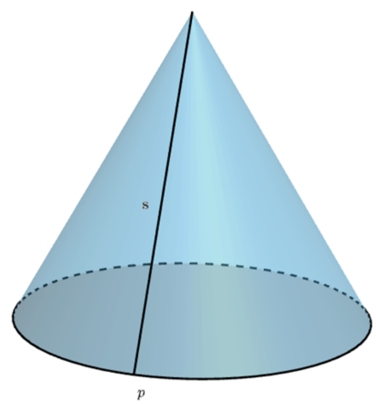
En esta sesión deduciremos una fórmula para calcular el área de la superficie de un sólido obtenido a partir de girar la gráfica de una función, continua y no negativa, alrededor del eje X y concluiremos la clase con un ejercicio *superinteresante*.

La Trompeta Infinita

Usando que el área de un triángulo es *base por altura sobre dos*, podemos ver que el área de las caras de una pirámide regular, como la de la figura 1a, es $\frac{1}{2}ps$, donde p denota el perímetro de la base y s la altura de cada uno de los triángulos isósceles que forman las caras.



(a) El área de las caras de una pirámide regular es $\frac{1}{2}ps$, donde p denota el perímetro de la base y s la altura de cada uno de los triángulos isósceles que forman las caras.



(b) El área de un cono recto de base circular (sin la base) es $\frac{1}{2}(2\pi)\, s = \pi r s$, donde r denota el radio de la base y s la longitud de la generatriz del cono.

Figura 1

Considerando pirámides con un número mayor de caras cada vez podemos conjeturar que el área de un cono recto de base circular (sin la base) es $\frac{1}{2}(2\pi)\, s = \pi r s$, donde r denota el radio de la base y s la longitud de la generatriz del cono, vea figura 1b.

Si ahora consideramos un "tronco" de cono, como el que se muestra en la figura 2, podemos hallar el área de su superficie (sin las "tapas") de la siguiente manera: Completamos el "tronco" hasta obtener un cono, como en la figura 3a.

De esta manera obtenemos que

$$\frac{s_1 + s}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}, \tag{1}$$

vea 3b. Ahora, de (1), se tiene que $(s_1 + s)r_1 = r_2 s_1$, luego $s r_1 = s_1(r_2 - r_1)$ y de aquí que

$$\frac{s r_1}{r_2 - r_1} = s_1. \tag{2}$$

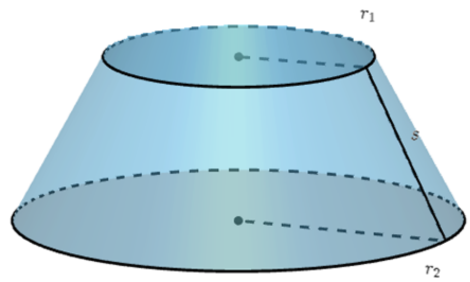
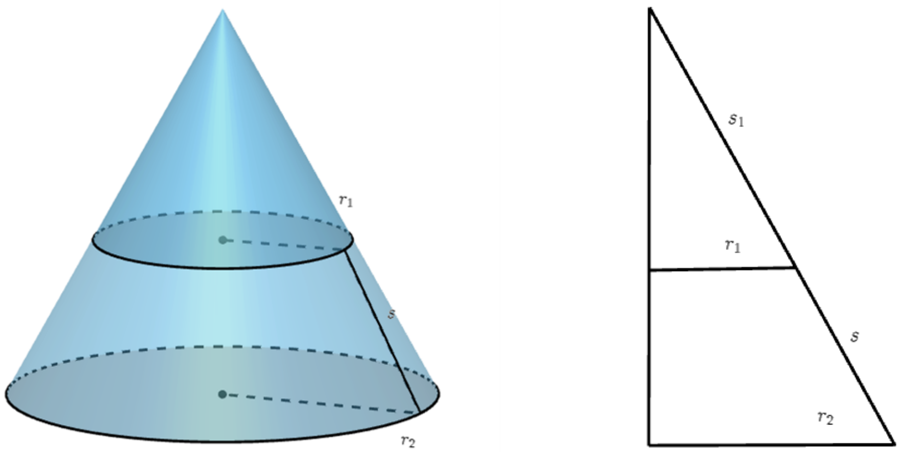


Figura 2



(a) Completamos el "tronco" a un cono. (b) Dos triángulos semejantes.

Figura 3

Por otro lado, también de (1), se tiene que $(s_1 + s)r_2 - r_2 s_1 = (s_1 + s)r_2 - (s_1 + s)r_1$, de donde $sr_2 = (s_1 + s)(r_2 - r_1)$ y luego

$$\frac{sr_2}{r_2 - r_1} = s_1 + s. \tag{3}$$

Así, usando (2) y (3), tenemos que el área de la superficie del "tronco" es

$$\begin{aligned}
\pi r_2(s_1 + s) - \pi r_1 s_1 &= \pi r_2 \left(\frac{sr_2}{r_2 - r_1} \right) - \pi r_1 \left(\frac{sr_1}{r_2 - r_1} \right) \\
&= \pi s \left(\frac{r_2^2}{r_2 - r_1} - \frac{r_1^2}{r_2 - r_1} \right) \\
&= \pi s \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 - r_1} \right) \\
&= \pi s (r_2 + r_1).
\end{aligned}$$

Una vez hecho esto, podemos comenzar a trabajar para obtener una fórmula para calcular el área de la superficie de un sólido obtenido a partir de girar la gráfica de una función, continua y no negativa, alrededor del eje X:

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a,b]$ y A el área del sólido que se obtiene al girar la gráfica de f alrededor del eje X. Consideremos ahora $P = \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Note que cada intervalo inducido por P induce un "tronco" como los estudiados anteriormente, vea figura 4.

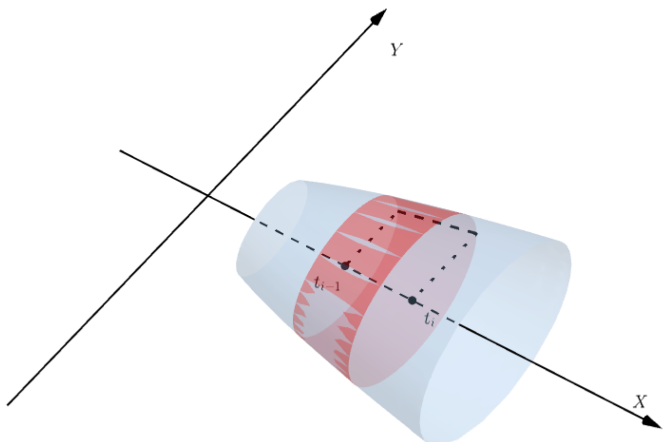


Figura 4: Cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ inducido por P induce un "tronco".

Luego, el área de la superficie del sólido formado por todos los "troncos" es

$$\pi \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}\,(f(t_i) + f(t_{i-1})) \tag{4}$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(f(t_i) + f(t_{i-1}))\,(t_i - t_{i-1})\,. \tag{5}$$

Ahora, dado que f es continua en $[a,b]$, se tiene que f es continua en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Si además suponemos que f es derivable en $[a,b]$, entonces f es derivable en cada $[t_{i-1}, t_i]$, por lo que podemos aplicar el Teorema del Valor Medio en cada uno de estos intervalo. Es decir, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ de tal manera que

$$f'(\xi_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}. \tag{6}$$

Sutituyendo (6) en (5), obtenemos que el área de la superficie del sólido formado por todos los "troncos" es

$$\pi \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,(f(t_i) + f(t_{i-1}))\,(t_i - t_{i-1})\,.$$

Finalmente, procediendo como lo hicimos en la Ayudantía 18, tenemos que

$$\pi \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,(f(t_i) + f(t_{i-1}))\,(t_i - t_{i-1}) \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,(t_i - t_{i-1})\,,$$

donde esta última suma es una suma de Riemann de la función $f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$. De esta manera deducimos que,

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx.$$

Ejemplo 1 (La trompeta infinita) *Sea $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 1/x$. Considere el sólido que se obtiene al girar la gráfica de f alrededor del eje X.*

(1) Halle el volumen de dicho sólido.

(2) Demuestre que el área de la superficie de dicho sólido es infinita.

Solución. A partir de ahora, al sólido que se obtiene al girar la gráfica de f alrededor del eje X lo llamaremos *la trompeta infinita.*

(1) Sean $t > 1$ y V_t el volumen del sólido que se obtiene al girar la gráfica de f alrededor del eje X, pero solo en el intervalo $[1, t]$. Por la Ayudantía 18, se tiene que

$$\begin{aligned} V_t &= \pi \int_1^t f^2(x)\ dx \\ &= \pi \int_1^t \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= \pi \left(\frac{-1}{x}\right)\Bigg|_1^t \\ &= \pi \left(1 - \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Así, si V es el volumen de *la trompeta infinita*, entonces

$$V = \lim_{t\to\infty} V_t = \lim_{t\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \pi.$$

(2) Sean $t > 1$ y A_t el área de la superficie del sólido que se obtiene al girar la gráfica de f alrededor del eje X, pero solo en el intervalo $[1, t]$. Por lo deducido en esta sesión, tenemos que

$$\begin{aligned} A_t &= 2\pi \int_1^t f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx \\ &= 2\pi \int_1^t \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\ dx \\ &= 2\pi \int_1^t \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\ dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$ para todo $x \in [1, t]$, se tiene que

$$2\pi \int_1^t \frac{1}{x}\ dx \leq 2\pi \int_1^t \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\ dx = A_t.$$

Por lo tanto

$$\infty = \lim_{t\to\infty} 2\pi \int_1^t \frac{1}{x}\ dx \leq \lim_{x\to\infty} A_t,$$

es decir, el área de la superficie de *la trompeta infinita* es infinita.

■

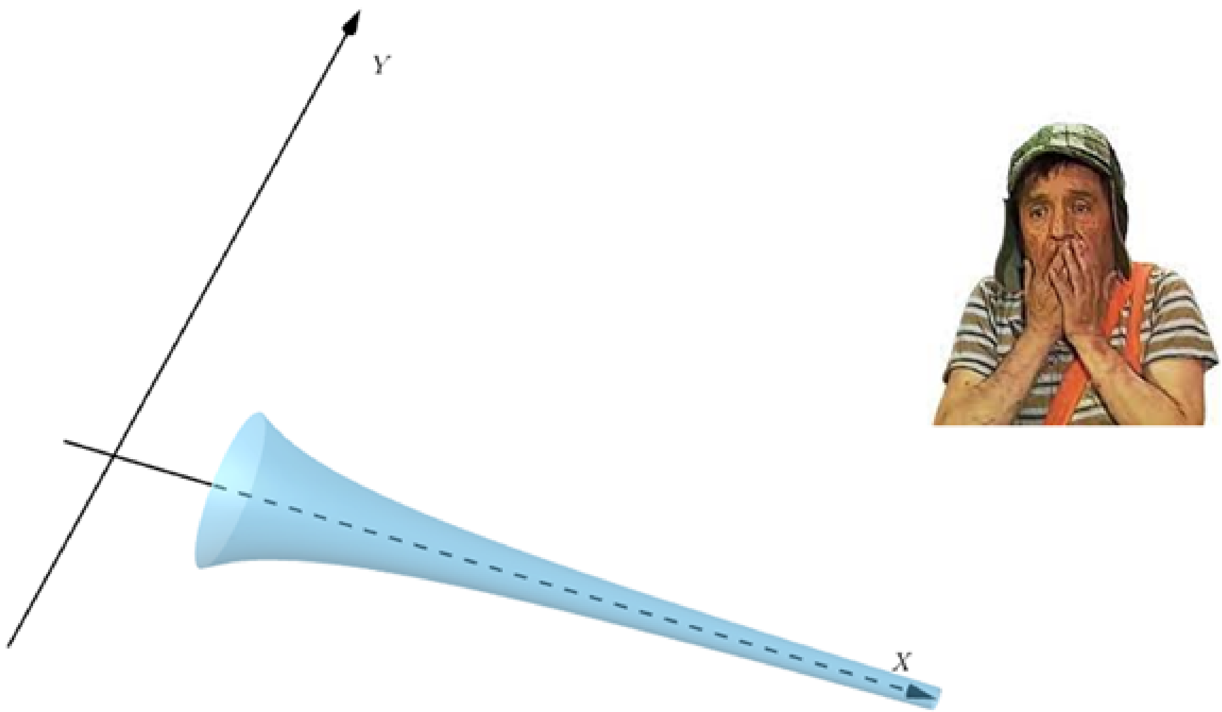


Figura 5: Para concluir con este ejemplo, piense que, si fuera posible, vaciar una cubeta de pintura azul, de al menos π litros, dentro de *la trompeta infinita*, esta se llenaría, de hecho el interior de *la trompeta infinita* se pintaría de azul. En este caso habríamos pintado con una cantidad FINITA de pintura una superficie de área INFINITA. ¿QUÉ ESTÁ PASANDO?