Ayudantía 20
Técnica de integración

Lema (Propiedad de King[1]):

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Demostración. Considérese el cambio de variable $u = a + b - x$, de modo que $du = -dx$. Con lo anterior, vemos que:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(a+b-x) = -\int_{u=b}^{u=a} f(u)du = \int_a^b f(u)du$$

Lo anterior, termina la prueba. ■

Corolario:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\ dx = \frac{b-a}{2}$$

Demostración. Sea g una función auxiliar definida por la regla de correspondencia:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}$$

Entonces:

$$I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$$

Aplicando el **Lema**, note que:

$$\int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b g(a+b-x)\ dx$$

Así, se cumple que:

$$I = \int_a^b g(a+b-x)\ dx = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}\ dx$$

Luego,

$$2I = \int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\ dx = \int_a^b 1\ dx = b-a$$

Por lo tanto, $I = \dfrac{b-a}{2}$

■

[1]Nombre original en inglés: *King Propety*

Ejercicio 1. *Usando el Lema de King, calcule...*

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{6-x}}\ dx = 1$$

El resultado es inmediato tras aplicar el corolario de la propiedad de King. ■

Ejercicio 2. *Calcule la la siguiente integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}\ dx$$

Demostración. Note que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\cos(x)}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}}\ dx$$

Lo anterior tiene la forma requerida para aplicar el corolario, entonces se cumple que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)}+\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}}\ dx = \frac{\pi}{4}$$

Así, hemos calculado lo requerido. ■

Ejercicio 3. *Encuentre el valor de la siguiente integral:*

$$\int_{\sqrt[3]{\log(3)}}^{\sqrt[3]{\log(4)}} \frac{x^2\sin(x^3)}{\sin(x^3)+\sin(\log(12)-x^3)}\ dx$$

Demostración. Notemos primero que se cumple lo siguiente:

$$\int_{\sqrt[3]{\log(3)}}^{\sqrt[3]{\log(4)}} \frac{x^2\sin(x^3)}{\sin(x^3)+\sin(\log(12)-x^3)}\ dx = \frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{\log(3)}}^{\sqrt[3]{\log(4)}} \frac{\sin(x^3)\ 3x^2}{\sin(x^3)+\sin(\log(12)-x^3)}\ dx = \cdots$$

Considérese el cambio de variable $u = x^3$, entonces $du = 3x^2dx$. Así, para $x = \sqrt[3]{\log(4)}$ tenemos $u = \log(4)$, y para $x = \sqrt[3]{\log(3)}$ tenemos $u = \log(3)$. Pero sabemos que $\log(12) = \log(3\cdot 4) = \log(3)+\log(4)$, así que podemos aplicar el corolario, lo que nos da lo siguiente:

$$\cdots = \frac{1}{3} = \int_{\log(4)}^{\log(3)} \frac{\sin(u)du}{\sin(u)+\sin(\log(12)-u)} = \frac{1}{3}(\frac{\log(4)-\log(3)}{2}) = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{6}\log(\frac{4}{3})$$

Lo que termina el ejercicio. ■

Ejercicio 4. *Calcule...*

$$\int_2^4 \frac{\log(x^2)}{\log(x^2)+\log(36-12x-x^2)}\ dx$$

Demostración. Note que

$$\int_2^4 \frac{\log(x^2)}{\log(x^2)+\log(36-12x-x^2)}\ dx = \int_2^4 \frac{\log(x^2)}{\log(x^2)+\log((6-x)^2)}\ dx = \cdots$$

Usando la propiedad de la función logaritmo $\log(x^n) = n\log(x)$, tenemos que:

$$\cdots = \int_2^4 \frac{2\log(x)}{2\log(x)+2\log(6-x)}\ dx = \int_2^4 \frac{\log(x)}{\log(x)+\log(6-x)}\ dx = \frac{4-2}{2} = 1$$

La forma anterior nos permite aplicar el corolario, por lo que:

$$\int_2^4 \frac{\log(x)}{\log(x)+\log(6-x)}\ dx = \frac{4-2}{2} = 1$$

∎

Ejercicio 5. *Calcule la siguiente integral:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}\ dx$$

Demostración. Sea

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}\ dx = \cdots$$

Usando que $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{2}-x)$ entonces se cumple:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan(\frac{\pi}{2}-x))^{\sqrt{2}}}\ dx$$

Pero también $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \tan(\frac{\pi}{2}-x)$, así,

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\dfrac{1}{(\tan(x))^{\sqrt{2}}}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan(x))^{\sqrt{2}}}{(\tan(x))^{\sqrt{2}}+1}\ dx$$

Entonces:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+(\tan(x))^{\sqrt{2}}}{(\tan(x))^{\sqrt{2}}+1}\ dx == \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, $I = \dfrac{\pi}{4}$

∎

Ahora, vemos que podemos calcular la siguiente integral:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2^{\sin(x)}}\ dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

¿Por qué se cumple la igual anterior? La respuesta se obtiene al aplicar el siguiente Lema.

Lema 2:

$$\int_{-a}^{a} \frac{par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx = \int_{0}^{a} par(x)dx$$

con $b \in \mathbb{R}^{+}$

Demostración. Comencemos utilizando una propiedad de la integral

$$\int_{-a}^{a} \frac{par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx = \int_{-a}^{0} \frac{par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx + \int_{0}^{a} \frac{par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx$$

Con lo anterior tenemos que:

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} \frac{par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx = \int_{0}^{a} \frac{b^{\ impar(x)} \cdot par(x) + par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx = \int_{0}^{a} par(x)\ dx$$

Lo que termina la prueba ■

Hagamos ahora la siguiente ***observación:***
Para calcular la suma en la prueba del Lema anterior partimos de la integral:

$$\int_{-a}^{0} \frac{par(x)}{1 + b^{\ impar(x)}}\ dx = \cdots$$

Considere el cambio de variable $u = -x$, entonces $x = -u$, y así $dx = -du$. Por lo cual:

$$\cdots = \int_{u=a}^{u=0} \frac{par(-u)(-du)}{1 + b^{\ impar(-u)}} = \int_{0}^{a} \frac{par(u)}{1 + b^{\ -impar(u)}}\ du = \int_{0}^{a} \frac{b^{\ impar(u)} \cdot par(u)}{b^{\ impar(u)} + 1}\ du$$

Y con lo anterior, es clara la implicación dentro de la prueba.