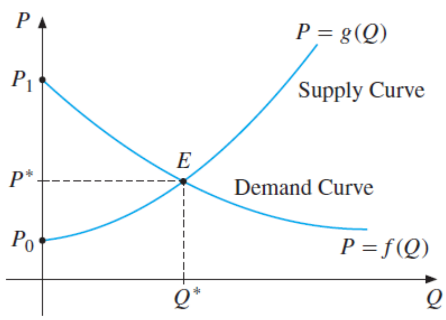
Ayudantía 21
Aplicaciones del Cálculo Integral a la actuaría y a la economía

Comenzaremos esta sesión con el siguiente ejemplo. Los economistas y actuarios, usualmente están interesados en estudiar cómo se benefician los consumidores y los productores de los cambios en las condiciones del mercado. Una forma común de determinar dicho beneficio es el superávit de consumidores y productores. Para ello, definiremos a continuación qué significan estos términos en el contexto de la economía para que el lector cuente con las herramientas necesarias para comprender nuestro ejemplo.

Definición 1. (Superávit del productor) El excedente o superávit del productor es la diferencia entre la utilidad total que obtiene un productor al vender un bien o servicio a su precio de mercado.

Definición 2. (Superávit del consumidor) El excedente o superávit del consumidor es la diferencia entre la utilidad total que obtenemos de un bien o servicio y su precio de mercado.

Para abordar nuestro problema, consideremos las siguientes curvas donde Q denota a la variable independiente de cantidad, P denota el precio como función de la cantidad, $P = g(Q)$ nos da la *curva de oferta* y $P = f(Q)$ nos da la *curva de demanda.*



Tenemos pues que la oferta iguala a la demanda en el punto con coordenadas $E = (Q^*, P^*)$ que es el punto de intersección entre ambas gráficas. A las cantidades P^* y Q^* se les conoce como *precio de equilibrio* y *cantidad de equilibrio* respectivamente. El *precio de equilibrio* es el precio donde los deseos de los consumidores y productores coinciden, es decir, el punto donde la cantidad de producto que los consumidores quieren comprar coincide con la cantidad de producto que los productores quieren vender. Esta cantidad deseada por ambas partes, se llama *cantidad de equilibrio*. En cualquier otro precio, la cantidad demandada no coincide con la cantidad ofertada. Por lo general estas gráficas tienen dichas formas pues se rigen por la *ley de oferta* y la *ley de la demanda*, donde la ley de oferta nos dice que la cantidad ofrecida de un bien aumenta cuando lo hace su precio y la ley de la demanda nos dice que la cantidad demandada de un bien disminuye cuando el precio de ese bien aumenta.

De acuerdo a la curva de la demanda $P = f(Q)$, hay consumidores que están dispuestos a pagar un precio mayor al precio de equilibrio P^* por un bien o producto dado, posiblemente, incluso tan alto como lo es P_1 en nuestro ejemplo. La cantidad total obtenida al considerar las compras de todos esos consumidores que obtienen el bien a un precio mayor o igual a P^* se le conoce como *excedente o superávit del consumidor*. De manera gráfica, en nuestro ejemplo se podría considerar como el área debajo de la curva $P = f(Q)$ y por encima de la recta $P = P^*$ entre 0 y Q^*. Lo que nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3. (Superávit del consumidor y del productor) Sean $f, g : I \subseteq [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones no negativas con $I \subseteq [0, \infty)$ un intervalo con $0 \in I$ y además donde f es estrictamente decreciente y representa la curva de demanda y g es estrictamente creciente y representa la curva de oferta. Supongamos que existe un punto de equilibrio de f y g llamado $E = (P^*, Q^*)$ que es el punto de intersección de f y g. Definimos el *superávit del consumidor* como:

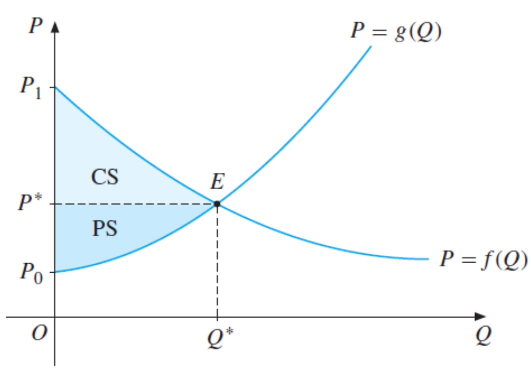
$$CS = \int_0^{Q^*} |f(Q) - P^*| dQ$$

y el *superávit del productor* como:

$$PS = \int_0^{Q^*} |P^* - g(Q)| dQ$$

Notemos que debemos pedir que el punto de intersección de f y g exista y de hecho, dos funciones con las características de la definición que tengan al menos un punto de intersección, dicho punto debe ser único (¿Puede el lector probar este hecho?). Por lo que podemos referirnos a dicho punto como *el* punto de equilibrio de f y g.

La definición del superávit del productor, está motivada como sigue: Considerando el punto Q^*, la cantidad de productos que el productor vende a un precio mayor o igual a P^* es la cantidad de productos a la izquierda de Q^*, por lo que las ganancias extra por decirlo de una manera, están dadas por el área entre las curvas P^* y $P = g(Q)$ entre 0 y Q^*.



Una vez dadas estas definiciones y conceptos previos, procederemos a ilustrar esto con un ejemplo sencillo:

Ejercicio 1. *Considere la curva de demanda* $f(Q) = 50 - 0.1Q$ *y la curva de oferta* $g(Q) = 0.2Q + 20$. *Encuentre el punto de equilibrio y el superávit del consumidor y del productor.*

Demostración. Notemos que f y g son derivables en $[0, \infty)$ y además son no negativas en $[0, 500]$, por lo que consideramos $I = [0, 500]$. Notemos que $f'(Q) = -0.1$ por lo que f es estrictamente decreciente y $g'(Q) = 0.2$, por lo que g es estrictamente creciente. Por lo que podemos ver si existe un punto de intersección entre f y g. Queremos que $f(Q) = g(Q)$, es decir, $50 - 0.1Q = 0.2Q + 20 \iff 0.3Q = 30 \iff Q = 100$ y notemos que $Q \in [0, 500]$ por lo que si existe un punto de intersección de f y g en I, el cuál es único y entonces nuestro punto de equilibrio es $E = (100, 40)$. Finalmente calculemos CS y PS. Por definición,

$$CS = \int_0^{100} |50 - 0.1Q - 40| dQ = \int_0^{100} (10 - 0.1Q) dQ = (10Q - 0.05Q^2)\Big|_0^{100} = 1000 - 500 = 500$$

y además

$$PS = \int_0^{100} |40 - (0.2Q + 20)| dQ = \int_0^{100} (20 - 0.2Q) dQ = (20Q - 0.1Q^2)\Big|_0^{100} = 2000 - 1000 = 1000$$

■

Ahora, consideremos otra aplicación. Posiblemente algunos de ustedes ya estén familiarizados con la Teoría de Probabilidad. Para los que no, no se preocupen, introduciremos de manera muy breve los conceptos más básicos para poder comprender lo que es una distribución de probabilidad y la importancia de la integral en ella. Comenzaremos dando una serie de definiciones técnicas que posiblemente no se entiendan del todo pero es para que tengamos un contexto de lo que estamos hablando.

Definición 4 (σ-álgebra) Sea Ω un conjunto y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, decimos que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\varnothing \in \mathscr{F}$
2. Si $E \in \mathscr{F}$ entonces $\Omega \setminus E \in \mathscr{F}$
3. Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{F}$

Definición 5 (Función de probabilidad) Sea $P : \mathscr{F} \longrightarrow [0, \infty)$ una función, decimos que P es una función de probabilidad si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos ajenos dos a dos, es decir, $E_i \cap E_j = \varnothing$ para cualesquiera $i \neq j$, entonces se cumple que $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(E_n)$

Definición 6. (Espacio de probabilidad y espacio muestral) Si Ω es un conjunto y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω con P una función de probabilidad, decimos que la terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un espacio de probabilidad. A los elementos de $\mathscr{F}$ se les conoce como eventos y al conjunto Ω se le conoce como espacio muestral.

Definición 7. (Variable aleatoria) Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que cumple que $X^{-1}[(a, b)] \in \mathscr{F}$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se dice que es una variable aleatoria.

Uno de los ejemplos más importantes de función de probabilidad es el siguiente: Consideremos Ω un conjunto finito. $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ donde $|A|$ denota la cardinalidad (cantidad de elementos) de A y lo mismo para Ω. Tenemos que $\mathscr{F}$ es una σ-álgera, P una función de probabilidad y por tanto $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ es un espacio de probabilidad

Ahora, explicaremos un poco qué significan estas definiciones de manera intuitiva. La definición de espacio de probabilidad, nos permite trabajar con conjuntos como {águila, sol} y estudiar las probabilidades de que una moneda equilibrada (es decir, que no este amañada) caiga águila o caiga sol al lanzarla. Una variable aleatoria es intuitivamente, una función que a cada subconjunto de nuestro espacio muestral nos asigna un valor. Por ejemplo, si consideramos Ω ={águila, sol} y $\mathscr{F} = \{\varnothing$, Ω, {águila},{sol}}, $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $X(\{\text{águila}\}) = 0$, $X(\{\text{sol}\}) = 1$ es una variable aleatoria. Tenemos que usando la medida de probabilidad definida arriba para conjuntos finitos, que $P(\{\text{águila}\})=\frac{1}{2}$ lo cual coincide con nuestra intuición de que la probabilidad de que caiga águila debería ser del 50 %. Finalmente, definamos uno de los conceptos más importantes de esta rama que es la probabilidad, el concepto de función de densidad.

Definición 8. (Variable aleatoria continua) Una variable aleatoria cuya imagen sea un intervalo.

Definición 9. (Variable aleatoria discreta) Una variable aleatoria cuya imagen sea un conjunto finito o numerable.

Definición 10. (Función de densidad de una variable aleatoria continua). Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad, decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa es la función de densidad de una variable aleatoria continua X si se cumple que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$,

$$P(X^{-1}[[a,b]]) = \int_a^b f(x)dx$$

Tenemos que la definición de función de densidad para variables aleatorias continuas involucra el concepto de integral definida, lo cual por sí mismo ya resalta la importancia del Cálculo Integral en la rama de la Probabilidad. Ahora, como ejemplo consideremos lo siguiente:

Ejercicio 2. *Sea $X \sim U(0,1)$, es decir, X es una variable aleatoria asociada a algún espacio de probabilidad cuya función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \\ \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases}$$

halle el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que $P[X \leq c] = P[X^{-1}[(-\infty, c]] = \frac{1}{8}$.

Demostración. Notemos que al decir que $X \sim U(0,1)$, estamos dando por implícito que X sólo toma valores en el intervalo $[0,1]$. Es decir, $Im(X) = [0,1]$. Sabemos que $P[X \leq c] = P[X^{-1}[(-\infty, c]]$. Si consideramos $c < 0$, tenemos que $P[X \leq c] = P[X^{-1}[(-\infty, c]] \leq P[X^{-1}[(-\infty, 0)] = P[\varnothing] = 0$ pues X no toma valores en $(-\infty, 0)$, como $0 \neq \frac{1}{8}$, no se cumple si $c < 0$. Si $c > 1$, sabemos que $X^{-1}[(-\infty, c]] = X^{-1}[[(-\infty, 0)] \cup X^{-1}[[0,c]] = \varnothing \cup X^{-1}[[0,c]] = X^{-1}[[0,c]] = X^{-1}[[0,1] \cup (1,c]] = X^{-1}[[0,1]] \cup X^{-1}[(1,c]] = X^{-1}[[0,1]] \cup \varnothing = X^{-1}[[0,1]]$ pues X no toma valores en $(1,c]$. Por lo que

$P[X \leq c] = P[X^{-1}[[0,1]]] = P[\Omega] = 1$ y no se cumple lo que se nos pide. Supongamos finalmente pues que $0 \leq c \leq 1$. Tenemos por definición de función de densidad que

$$P[X \leq c] = \int_0^c f(x)dx = \int_0^c 1dx = c$$

Por lo tanto, basta pedir $c = \frac{1}{8}$. ■