Ayudantía 22
Una aplicación del Cálculo Integral a la Mecánica Clásica

Definición 1. Sea f una función continua en $[a,b]$. Si $\mathbf{P} = t_0, \ldots, t_n$ es una partición de $[a,b]$, definimos

$$l(f, \mathbf{P}) = \Sigma_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}.$$

El número $l(f, \mathbf{P})$ representa la longitud de la curva poligonal inscrita en la gráfica de f.

Definición 2. Definimos la longitud de f en $[a,b]$ como la mínima cota superior de todos los $l(f, \mathbf{P})$ para todas las particiones $\mathbf{P}$

Observación 3. Si f' es acotada y $\mathbf{P}$ es cualquier partición de $[a,b]$ entonces:

$$\underline{S}(\sqrt{1 + [f'(x)]^2}, \mathbf{P}) \leq l(f, \mathbf{P}) \leq \bar{S}(\sqrt{1 + [f'(x)]^2}, \mathbf{P})$$

De modo que si $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es integrable

$$\mathfrak{L}(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \tag{1}$$

es la longitud de f en $[a,b]$.

En Mecánica Clásica, es posible describir la dinámica de la rotación de un cuerpo con masa y dimensión[1]. Para hacer esta descripción es necesario introducir algunos conceptos importantes, definidos a partir de aplicar la Segunda Ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$ a un sistema de partículas con masa que está rotando. Uno de ellos es el de **Momento de Inercia** I que toma el lugar de m en la ecuación de Newton, y sirve como una medida de la resistencia que presenta el cuerpo a rotar.

El momento de inercia depende solamente de la distribución geométrica de la masa del objeto y del punto que se considere centro de rotación, de modo que utilizando los resultados de cálculo integral para medir la longitud de una curva, es posible calcular momentos de inercia.

En particular para cualquier distribución lineal de masa en un plano, el momento de inercia puede escribirse como:

$$I_0 = \lambda \int_a^b (x^2 + f(x)^2) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \tag{2}$$

donde $f(x)$ es una función continua con derivada continua que cumple que la gráfica de f coincide geométricamente con la distribución de masa y λ es la densidad lineal de masa de la distribución.

Ejercicio 4. *Calcule el momento de inercia de una barra homogénea de longitud l y masa M respecto a uno de sus extremos.*

Sabemos que el resultado es independiente del sistema de coordenadas con que elijamos describir el sistema, por ello, escojamos uno que nos proporcione expresiones con las cuales sabemos trabajar.

Como la barra es recta puede ser descrita por un intervalo de la recta real de la misma longitud. Notemos que si la alineamos con intervalo $[0,l]$ del eje x, la gráfica de la función $f : [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0$ coincide geométricamente con la barra, y esto es lo necesario para aplicar el resultado anterior. Ahora, como la barra es homogénea, tiene densidad lineal de masa constante,es decir, la masa está distribuida uniformemente a lo largo de la barra. Por lo que podemos asegurar que $\lambda = \frac{M}{l}$

Sustituyendo f y f' y λ en 2 tenemos

[1] No es puntual como en la primera aproximación a un cuerpo con masa, sino que se considera que tiene tamaño: longitud, área o volumen, según sea el caso.

$$I_0 = \frac{M}{l}\int_0^l (x^2+0)\sqrt{1+0}dx$$

$$I_0 = \frac{M}{l}\int_0^l x^2 dx$$

$$I_0 = \frac{M}{l}(\frac{l^3}{3} - \frac{0}{3})$$

$$I_0 = \frac{1}{3}Ml^2$$

Por lo tanto, el momento de inercia de la barra respecto a un extremo es $I_0 = \frac{1}{3}Ml^2$.

Ejercicio 5. *¿Cual será el momento de inercia de la misma barra pero respecto a su punto medio?*

Notemos que como se trata de la misma barra, la masa y la densidad lineal serán las mismas, solamente es necesario cambiar la descripción geométrica de la barra respecto a los ejes y pensar en la gráfica de la función constante cero pero ahora en el intervalo $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$. Es decir

$$I_1 = \frac{M}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (x^2+0)\sqrt{1+0}dx$$

$$I_1 = \frac{M}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx$$

$$I_1 = \frac{M}{l}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$I_1 = \frac{M}{l}\frac{1}{3}[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}]$$

$$I_1 = \frac{M}{l}\frac{1}{3}\frac{l^3}{4}$$

$$I_1 = \frac{1}{12}Ml^2$$

¿Y cual será el momento de inercia respecto a un punto arbitrario en la barra? *Hint:* la respuesta está en los límites de integración.