Última actualización: 2 de diciembre de 2021

Clase 24

Recordemos el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo: Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$. Si existe una función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a,b]$ tal que $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Definición 1 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Diremos que $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una* **primitiva** *de f si $g'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a,b]$.*

Observación 2 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Note que si f tiene una primitiva, digamos $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces tiene una infinidad de primitivas, pues para todo $C \in \mathbb{R}$ la función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(x) + C$ cumple que $h'(x) = g'(x) = f(x)$*

Para este capítulo nos conviene introducir la siguiente notación con el fin de sintetizar las expresiones: $g(x)|_a^b = g(b) - g(a)$.

Ejemplo 3 *Consideremos la función $g(x) = x \cdot ln(x) - x$, esta función cumple que $g'(x) = ln(x)$. Por lo tanto, g cumple la definición anterior para la función logaritmo natural, es decir, $g(x)$ es una primitiva de $ln(x)$ y podemos escribir:*

$$\int_a^b ln(x) = g(x)|_a^b = (x \cdot ln(x) - x)|_a^b = (b \cdot ln(b) - b) - (a \cdot ln(a) - a).$$

Se sigue del Primer Teorema Fundamental del Cálculo que cualquier función continua f siempre posee una primitiva, concretamente, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Sin embargo, encontrar explícitamente una expresión de la primitiva en términos de funciones elementales[1] no es trivial y, de hecho, muy pocas veces se tienen ejemplos tan sencillos como el anterior.

En este capítulo veremos que los «métodos» de integración más comunes de integración son en realidad teoremas muy importantes (aplicables a todas las funciones, no solamente las funciones elementales).

Integración por Partes

El propósito de este capítulo es aprender resultados que nos permitan sistematizar el proceso de encontrar funciones primitivas, conocido coloquialmente como integrar. Antes de comenzar, debemos hacer dos advertencias. La primera: en general, no siempre es posible expresar la primitiva de una función en términos de funciones elementales. [2] La segunda: en general, tampoco tendremos forma de saber cuando una primitiva elemental puede ser hallada.

[1] Una **función elemental** es aquella que puede obtenerse mediante la suma, multiplicación, división y composición de funciones racionales, funciones trigonométricas y sus inversas así como las funciones log y exp.

[2] Por ejemplo, no hay ninguna función F expresada en términos de funciones elementales, tal que $F'(x) = exp(x^2)$ para todo x.

Es necesario tener presente la definición de integral de una función que hemos trabajado hasta ahora, conocida como integral definida, y hacer énfasis en que se trata de un número real.

Definición 4 *Llamaremos* **integral definida** *de f en $[a,b]$ al* **número real**

$$\sup\{\bar{S}(f,P)|P\in P\} = \text{ínf}\{\bar{S}(f,P)|P\in P\}$$

y lo denotaremos $\int_a^b f$ *o* $\int_a^b f(x)dx$.

Para este capítulo es necesario introducir el concepto de integral indefinida a partir de la siguiente definición:

Definición 5 *Llamaremos* **integral indefinida** *de f al* **conjunto de primitivas** *de una función f, y lo denotaremos* $\int f$ *o* $\int f(x)dx$.

Usualmente la primera será una notación cómoda para los enunciados de los teoremas y proposiciones, mientras que la segunda será de mayor utilidad para el cálculo explícito.

Ejemplo 6 *La siguiente expresión*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

significa que las funciones de la forma $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ *con $n\in\mathbb{N}$ y $C\in\mathbb{R}$ satisfacen que* $F'(x) = x^n$.

Para empezar, recordemos las primitivas que se siguen de derivar las funciones que hemos estudiado hasta ahora. Para economizar la notación, omitiremos la constante al final, no sin dejar de hacer énfasis en su relevancia.

$$\int a\cdot dx = a\cdot x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int sen(x)dx = -cos(x)$$

$$\int cos(x)dx = sen(x)$$

$$\int sec^2(x)dx = tg(x)$$

$$\int sec(x)tg(x)dx = sec(x)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x)$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arccos(x)$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln(x)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int ln(x) = x \cdot ln(x) - x$$

La primera «fórmula general» que veremos es una propiedad conocida como *linealidad de la integral* y se sigue inmediatamente de las propiedades de aritmética de funciones integrables estudiadas en el capítulo 1.

Teorema 7 *Si f y g son continuas, y a cualquier número real, entonces*

$$\int [a \cdot f(x) + g(x)]dx = a \cdot \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

De manera similar, la fórmula de la derivada de un producto, da pie a un teorema más interesante, que será de gran utilidad cuando la función a integrar pueda pueda escribirse como el producto de una función y la derivada de otra.

Teorema 8 (Integración por partes) *Sea $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones tales que f' y g' son continuas en $[a, b]$, entonces*

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Demostración. Como f y g son derivables, fg es derivable y por la regla del producto se tiene que

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

reescribiendo la expresión anterior, tenemos

$$f \cdot g' = (fg)' - f' \cdot g$$

integrando de ambos lados y aplicando la linealidad, se tiene que

$$\int f' \cdot g = \int [(fg)' - f \cdot g'] = \int (fg)' - \int f \cdot g'$$

ahora, dado que (fg) es una primitiva de $(fg)'$, se tiene

$$\int f \cdot g' = fg - \int f' \cdot g$$

que es lo que se quería demostrar. ■

A continuación, veremos algunos ejemplos de cómo aplicar este teorema.

Ejemplo 9 *Encuentre* $\int xe^x dx$

Solución. Pensemos que $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$ De ese modo, $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ y $(fg)(x) = xe^x$. Sustituyendo en la expresión del teorema de integración por partes tenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

Por lo tanto

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x.$$

■

Ejemplo 10 *Halle* $\int x \cdot sen(x)dx$

Solución. Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = sen(x)$ De este modo, se tiene que $f'(x) = 1$, $g(x) = -cos(x)$ y $(fg)(x) = -x \cdot cos(x)$. Sustituyendo tenemos

$$\int x \cdot sen(x)dx = -x \cdot cos(x) - \int -cos(x)dx = -x \cdot cos(x) + \int cos(x)dx = -x \cdot cos(x) + sen(x).$$

Por lo tanto

$$\int x \cdot sen(x)dx = -x \cdot cos(x) + sen(x).$$

■

Ejemplo 11 *Halle* $\int x \cdot cos(x)dx$

Solución. Escojamos $f(x) = x$ y $g'(x) = cos(x)$ De este modo, se tiene que $f'(x) = 1$, $g(x) = sen(x)$ y $(fg)(x) = x \cdot sen(x)$. Sustituyendo tenemos

$$\int x \cdot cos(x)dx = x \cdot sen(x) - \int sen(x)dx = x \cdot sen(x) - (-cos(x)) = x \cdot sen(x) + cos(x).$$

Por lo tanto

$$\int x \cdot cos(x)dx = x \cdot sen(x) + cos(x).$$

■

Ejemplo 12 *Halle* $\int ln^2(x)dx = \int ln(x) \cdot ln(x)dx$

Solución. En este caso no hay de otra más que asignar $f(x) = ln(x)$ y $g'(x) = ln(x)$. En el ejemplo 2 de esta clase vimos que $g(x) = x \cdot ln(x) - x$, además, $f'(x) = \frac{1}{x}$, de modo que $(fg)(x) = ln(x) \cdot (x \cdot ln(x) - x)$

Así las cosas, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int ln^2(x)dx &= ln(x)\cdot(x\cdot ln(x)-x)-\int \frac{x\cdot ln(x)-x}{x}dx\\
&= ln(x)\cdot(x\cdot ln(x)-x)-\int [ln(x)-1]dx\\
&= ln(x)\cdot(x\cdot ln(x)-x)-\int ln(x)dx-\int dx\\
&= ln(x)\cdot(x\cdot ln(x)-x)-(x\cdot ln(x)-x)+x\\
&= x\cdot ln^2(x)-x\cdot ln(x)-x\cdot ln(x)+x+x\\
&= x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2x
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int ln^2(x)dx = x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2x$$

■