Última actualización: 9 de diciembre de 2021

Clase 25

Integración por Cambio de Variable

El siguiente teorema es consecuencia de la regla de la cadena y, probablemente, el más importante de los métodos de integración que veremos. Para facilitar su entendimiento comenzaremos enunciándolo en términos de integrales definidas y posteriormente veremos el tratamiento para integrales indefinidas.

Teorema 1 (Teorema de Cambio de Variable) *Sean f, g dos funciones, si existe $(f \circ g)$ y f', g' son continuas, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) g'$$

o

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ g)(x) g'(x) dx$$

Demostración. Como f es derivable, consideremos F, una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo x. Por un lado, al derivar la composición $(F \circ g)$ utilizando la regla de la cadena se tiene que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

y utilizando que F es primitiva de f, se sigue que

$$(F \circ g)'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

es decir, $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Por otro lado, como F es una primitiva de f, por el 2^oT.F.C., se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}\int_{g(a)}^{g(b)} f &= F(x)\Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)\end{aligned}$$

Y como $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$, por el 2^oT.F.C., se sigue que

$$\int_a^b (f \circ g) g' = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$$

Por lo tanto

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) g'$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Para poder aplicar éste teorema necesitamos poder ver la expresión dentro de la integral como una función de la forma $(f \circ g)g'$, para aclararlo, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2 *Halle* $\int_a^b sen^n(x) \cdot cos(x)dx$

Solución. Lo primero que hay que notar es que $sen'(x) = cos(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, además $sen^n(x)$ se puede ver como una composición de funciones: sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^n$, entonces $(f \circ sen)(x) = f(sen(x)) = sen^n(x)$.

Como además, f' es continua, f(x) y sen(x) = g(x) cumplen todas las hipótesis del Teorema de Cambio de Variable, por lo tanto, se cumple la siguiente igualdad.

$$\int_{sen(a)}^{sen(b)} u^n = \int_a^b sen^n(x) \cdot cos(x)dx.$$

Aplicando el segundo teorema fundamental del cálculo al lado izquierdo de la igualdad tenemos que

$$\int_{sen(a)}^{sen(b)} u^n = \left.\frac{u^{n+1}}{n+1}\right|_{sen(a)}^{sen(b)} = \frac{sen^{(n+1)}(b)}{n+1} - \frac{sen^{(n+1)}(a)}{n+1}$$

Por lo tanto

$$\int_a^b sen^n(x) \cdot cos(x)dx = \frac{sen^{(n+1)}(b)}{n+1} - \frac{sen^{(n+1)}(a)}{n+1}$$

■

Observación 3 *La igualdad anterior nos permite también encontrar la integral indefinida ya que de ella se sigue que* $F(x) = \frac{sen^{(n+1)}(x)}{n+1}$ *es una primitiva de la función* $sen^n(x) \cdot cos(x)$*, de modo que* $\forall\, C \in \mathbb{R}$

$$\int sen^n(x) \cdot cos(x) = \frac{sen^{(n+1)}(x)}{n+1} + C$$

Ejemplo 4 *Halle* $\int_a^b tg(x)dx$

Solución. Recorando que $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ y que $cos'(x) = -sen(x)$, y considerando $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, podemos construir la siguiente composición: $(f \cdot cos)(x) = f(cos(x)) = \frac{1}{cos(x)}$. De modo que $(f \cdot cos)(x) \cdot cos'(x) = \frac{-sen(x)}{cos(x)} = -tg(x)$.

Note que $f(x)$ y $cos(x)$ cumplen las hipótesis del T.C.V., por lo tanto

$$\int_a^b (f \cdot cos)(x) \cdot cos'(x)dx = \int_{cos(a)}^{cos(b)} f(u)du.$$

Sustituyendo explícitamente las expresiones se tiene que

$$\int_a^b -tg(x)dx = \int_{cos(a)}^{cos(b)} \frac{1}{u}du$$

por linealidad de la integral podemos «sacar» el signo negativo y despejarlo, además, ya sabemos integrar el lado derecho, por lo que

$$\begin{aligned}\int_a^b tg(x)dx &= -\int_{cos(a)}^{cos(b)} \frac{1}{u}du \\ &= -ln(u)\Big|_{cos(a)}^{cos(b)} \\ &= -(ln(cos(b)) - ln(cos(a))) \\ &= ln(cos(a)) - ln(cos(b)) \\ &= ln(\frac{cos(a)}{cos(b)})\end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_a^b tg(x)dx = ln(\frac{cos(a)}{cos(b)})$. ■

Observación 5 *Así como en el ejercicio anterior, la última igualdad, nos permite encontrar la integral indefinida, ya que $-ln(cos(x))$ es una primitiva de la función $tg(x)$, de modo que $\forall\, C \in \mathbb{R}$*

$$\int tg(x)dx = -ln(cos(x)) + C$$

La relación entre integral definida e indefinida exhibida en estos ejemplos se cumple siempre, por lo que, con el objetivo de reducir los pasos intermedios para llegar al resultado, podemos omitir los límites de integración durante el proceso para obtener la integral indefinida y posteriormente evaluar de manera correcta la composición. Note que al hacer esto, ignorar los límites de integración, no será posible afirmar que se cumple la igualdad entre términos al principio.

Ejemplo 6 *Halle* $\int_a^b cos(kx)dx$

Solución. Consideremos primero $\int cos(kx)dx$. Sea $u(x) = kx$, de modo que $\frac{du}{dx} = k$. Por el teorema de la función inversa se tiene que $\frac{dx}{du} = 1/k$. De modo que podemos escribir el diferencial de x, como $dx = \frac{dx}{du}du = \frac{1}{k}du$, al sustituir, tenemos que

$$\int cos(kx)dx \longrightarrow \int cos(u)\frac{1}{k}du = \frac{1}{k} \cdot \int cos(u)du = \frac{1}{k}sen(u).$$

Ahora, sustituyendo de regreso $u(x) = kx$ se obtiene: $\frac{sen(kx)}{k}$, que resulta ser una primitiva de $cos(kx)$, por lo que

$$\int cos(kx)dx = \frac{sen(kx)}{k}$$

Por lo tanto

$$\int_a^b cos(kx)dx = \frac{sen(kx)}{k}\Big|_a^b = \frac{sen(kb) - sen(ka)}{k}$$

■

Con el ejemplo anterior vemos que trabajar con la integral indefinida reduce bastante el proceso, por lo que en los siguientes ejemplos nos concentraremos en encontrar solamente primitivas.

Ejemplo 7 *Halle* $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot ln(x)} dx$

Solución. Notemos que al hacer la sustitución considerando el teorema de la función inversa es equivalente a poder escribir du, la diferencial de u, en términos de x (o viceversa), y al hacerlo se simplifica aún más el procedimiento.

Sea $u(x) = ln(x)$, entonces $du = d(ln(x))dx = \dfrac{1}{x}dx$. Sustituyendo tenemos lo siguiente

$$\int \frac{1}{x \cdot ln(x)} dx \longrightarrow \int \frac{1}{u} du = ln(u)$$

Regresando a la variable original, tenemos que $ln(ln(x))$ es una primitiva de $\dfrac{1}{x \cdot ln(x)}dx$. Por lo tanto, $\forall\, C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x \cdot ln(x)} dx = ln(ln(x)) + C$$

■

Ejemplo 8 *Halle* $\displaystyle\int cos(x) \cdot e^{sen(x)} dx$

Solución. Sea $u(x) = sen(x)$ de modo que $du = cos(x)dx$, sustituyendo tenemos que

$$\int cos(x) \cdot e^{sen(x)} dx \longrightarrow \int e^u du = e^u.$$

Por lo tanto

$$\int cos(x) \cdot e^{sen(x)} dx = e^{sen(x)} + C$$

■

Ejemplo 9 *Halle* $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

Solución. Antes de aplicar alguna sustitución nos conviene «trabajar» un poco el integrando. Consideremos lo siguiente

$$\frac{1+e^x}{1-e^x} = \frac{1+e^x+0}{1-e^x} = \frac{1+e^x+(e^x-e^x)}{1-e^x} = \frac{1-e^x+2e^x}{1-e^x} = \frac{1-e^x}{1-e^x} + \frac{2e^x}{1-e^x} = 1 + \frac{2e^x}{1-e^x}$$

De modo que

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int 1 + \frac{2e^x}{1-e^x} dx = \int 1 dx + \int \frac{2e^x}{1-e^x} dx = x + 2\int \frac{e^x}{1-e^x} dx$$

Para resolver $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^x} dx$ consideremos $u(x) = 1 - e^x$ de modo que $du = -e^x dx$. Sustituyendo tenemos

$$\int \frac{e^x}{1-e^x} dx \longrightarrow \int \frac{-du}{u} = -ln(u)$$

por lo que

$$\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = -ln(1-e^x)$$

Finalmente, para toda $C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = x - 2ln(1-e^x) + C$$

■

Ejemplo 10 *Halle* $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Solución. Sea $u(x) = \sqrt{e^x+1}$, de modo que $u^2 = e^x + 1$, entonces $x = ln(u^2-1)$, $dx = \dfrac{2u}{u^2-1}du$ y $e^{2x} = (u^2-1)^2$. Sustituyendo se tiene lo siguiente

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx \longrightarrow \int \frac{(u^2-1)^2}{u} \cdot \frac{2u}{u^2-1}du = 2\int (u^2-1)du = 2\int u^2du - 2\int du = 2\frac{u^3}{3} - 2u$$

Por lo tanto

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \frac{2}{3}(\sqrt{e^x+1})^3 - 2\sqrt{e^x+1} + C$$

■