Última actualización: 6 de diciembre de 2021

Clase 26

Integración de funciones trigonométricas y por sustitución trigonométrica

Teorema 1 (Integración por partes) *Sea $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones tales que f' y g' son continuas en $[a,b]$, entonces*

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Teorema 2 (Teorema de Cambio de Variable o Método de Sustitución) *Sean f, g dos funciones, si existe $(f \circ g)$ y f', g' son continuas, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ g)(x) g'(x) dx$$

Veamos un ejemplo donde sea necesario aplicar ambos métodos para llegar a la solución.

Ejemplo 3 *Encuentre $\int arctan(x)dx$.*

Solución. Primero apliquemos el método de integración por partes. Considerando $f(x) = arctan(x)$ de modo que $\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ y $\frac{dg}{dx} = 1$ de modo que $g(x) = x$. Se tiene que

$$\int arctan(x)dx = x \cdot arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Para resolver $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ utilicemos el teorema de cambio de variable: Sea $u = 1 + x^2$ de modo que $du = 2xdx$, entonces $\frac{du}{2} = xdx$. Sustituyendo tenemos que

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx \longrightarrow \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln(u).$$

Por lo que $\forall C \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} ln(1+x^2) + C.$$

Por lo tanto

$$\int arctan(x)dx = x \cdot arctan(x) - \frac{1}{2} ln(1+x^2) + C$$

■

Como se ha visto en los ejemplos, en general no hay una regla clara que nos indique el cambio de variable adecuado para llevar a cabo la integración, por lo que vale la pena estudiar aquellos que son recurrentes.

Integración de funciones trigonométricas

Estudiaremos 4 situaciones que involucran a las funciones seno y coseno.

1. Para integrar expresiones de la forma $sen^n(x)$, $cos^n(x)$, con n par:

   De la fórmula para el coseno de un ángulo doble se tiene que $cos(2x) = cos^2(x) + sen^2(x)$, además, $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$. Entonces

$$cos(2x) = cos^2(x) - (1 - cos^2(x)) = 2cos^2(x) - 1$$
$$cos(2x) = (1 - sen^2(x)) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x)$$

   Despejando, se tienen las siguientes identidades:

$$sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$
$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}$$

   Que podemos utilizar para llevar a cabo la integración, ya que, como n es par, $n = 2k$, para algún $k \in \mathbb{N}$ de modo que podemos escribir $sen^n(x) = sen^{2k}(x) = (sen^2(x))^k$ y $cos^n(x) = cos^{2k}(x) = (cos^2(x))^k$ y utilizar las identidades para sustituir $sen^2(x)$ o $cos^2(x)$, según sea el caso.

   Ejemplo 4 *Encuentre* $\int sen^4(x)dx$.

   Solución. Utilizando las identidades anteriores, podemos reescribir la expresión de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\int sen^4(x)dx = \int (sen^2(x))^2 dx &= \int \left(\frac{1 - cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1}{4}(1 - 2cos(2x) + cos^2(2x))dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int cos(2x)dx + \int cos^2(2x)dx\right)
\end{aligned}$$

   Aplicando ahora la identidad para $cos^2(x)$ en la última integral y resolviendo se tiene que

$$\begin{aligned}
\int sen^4(x)dx &= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int cos(2x)dx + \int \frac{1 + cos(4x)}{2}dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x - 2\frac{sen(2x)}{2} + \frac{1}{2}\left(\int dx + \int cos(4x)dx\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x - sen(2x) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{sen(4x)}{4}\right)\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\left(x - sen(2x) + \frac{x}{2} + \frac{sen(4x)}{8}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} - sen(2x) + \frac{sen(4x)}{8}\right) + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{sen(2x)}{4} + \frac{sen(4x)}{32} + C
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2. Para integrar expresiones de la forma $sen^n(x)$, $cos^n(x)$, con n impar:

   Como n es impar, se tiene que $n = 2k + 1$, para algún $k \in \mathbb{N}$. De modo que podemos escribir el integrando como
$$sen^n(x) = sen^{(2k+1)}(x) = sen^{2k}(x) \cdot sen(x)$$
   o
$$cos^n(x) = cos^{(2k+1)}(x) = cos^{2k}(x) \cdot cos(x)$$
   Y sustituir $sen^2(x)$ por $(1 - cos^2(x))$ o $cos^2(x)$ por $(1 - sen^2(x))$, según sea el caso.

   Ejemplo 5 *Encuentro* $\int sen^3(x)dx$.

   Solución. Apliquemos el procedimiento indicado.
$$\begin{aligned}\int sen^3(x)dx &= \int sen(x) \cdot sen^2(x)dx = \int sen(x) \cdot (1 - cos^2(x))dx \\ &= \int sen(x)dx - \int sen(x)cos^2(x)dx \\ &= -cos(x) - \int sen(x)cos^2(x)dx\end{aligned}$$
   Para resolver $\int sen(x)cos^2(x)dx$ podemos considerar el siguiente cambio de variable: Sea $u = cos(x)$ de modo que $du = -sen(x)dx$. Entonces $\int sen(x)cos^2(x)dx = -\frac{cos^3(x)}{3}$. Por lo tanto
$$\int sen^3(x)dx = -cos(x) + \frac{cos^3(x)}{3} + C.$$
   $\blacksquare$

3. Para integrar expresiones de la forma $sen^n(x) \cdot cos^m(x)$, con n o m impar:

   Supongamos, sin pérdida de generalidad, que n es impar, de modo que $n = 2k+1$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces conviene proceder de la misma manera que en la situación anterior.

   Ejemplo 6 *Encuentre* $\int sen^2(x) \cdot cos^3(x)dx$.

   Solución. Reescribiendo $cos^3(x) = cos(x) \cdot cos^2(x) = cos(x) \cdot (1 - sen^2(x))$ tenemos que.
$$\int sen^2(x) \cdot cos^3(x)dx = \int sen^2(x) \cdot cos(x) \cdot (1 - sen^2(x))dx$$
   Resolviendo el producto y utilizando la linealidad de la integral se sigue que
$$\int sen^2(x) \cdot cos^3(x)dx = \int sen^2(x) \cdot cos(x)dx - \int sen^4(x) \cdot cos(x)dx$$
   Las dos integrales a la derecha se pueden resolver con la misma sustitución, $u = sen(x)$ de modo que $du = cos(x)dx$. Por lo tanto
$$\int sen^2(x) \cdot cos^3(x)dx = \frac{sen^3(x)}{3} - \frac{sen^5(x)}{5} + C.$$
   $\blacksquare$

4. Para integrar expresiones de la forma $sen^n(x) \cdot cos^m(x)$, con n y m par:

   Como n y m son pares se sigue que $n = 2k$ y $m = 2l$, para algunos k, l en $\mathbb{N}$, de modo que
   $$sen^n(x) \cdot cos^m(x) = (sen^2(x))^k \cdot (cos^2(x))^l$$
   Entonces conviene sustituir ambos por las identidades de la primer situación y desarrollar.

   Ejemplo 7 *Encuentre* $\int sen^2(x) \cdot cos^2(x)dx$.

   Solución.
   $$\begin{aligned}\int sen^2(x) \cdot cos^2(x)dx &= \int \left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+cos(2x)}{2}\right)dx = \quad = \frac{1}{4}\int (1-cos^2(2x))dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int cos^2(2x)dx\right) \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \frac{1+cos(4x)}{2}dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\left(\int dx + \int cos(4x)dx\right) \\ &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{8}\frac{sen(4x)}{4} + C \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32}sen(4x) + C\end{aligned}$$
   ■

Sustitución trigonométrica

Ahora, estudiaremos un tipo de sustitución que es muy útil cuando podemos asociar el integrando con un triángulo rectángulo a través del teorema de Pitágoras.

Ejemplo 8 *Halle* $I_1 = \int \sqrt{1-t^2}dt$

Solución. Pensemos en el tríangulo rectángulo que tiene hipotenusa $c = 1$ y uno de sus catetos es $a = t$, de modo que, por el teorema de Pitágoras, podemos escribir el otro cateto como $b = \sqrt{1-t^2}$. Entonces, en ese triángulo se cumplen las siguientes identidades trigonométricas: Para θ, el ángulo formado entre c y a se tiene que $sen(\theta) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1} = \sqrt{1-t^2}$. Y $cos(\theta) = \frac{t}{1} = t$, de modo que $dt = -sen(\theta)d\theta$. Sustituyendo tenemos lo siguiente
$$I_1 \longrightarrow \int sen(\theta) \cdot (-sen(\theta))d\theta = -\int sen^2(\theta)d\theta = -\int \frac{1-cos(2\theta)}{2}d\theta = -\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{sen(2\theta)}{2}\right) + C$$

Utilizando que $sen(2\theta) = 2sen(\theta) \cdot cos(\theta)$ se tiene
$$\int sen(\theta) \cdot (-sen(\theta))d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{2sen(\theta) \cdot cos(\theta)}{4} + C$$
Por lo tanto, regresando a la variable t se tiene
$$I_1 = -\frac{\arccos(t)}{2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + C$$
■

Ejemplo 9 *Halle* $I_2 = \int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

Solución. Pensemos en el triángulo rectángulo que tiene hipotenusa $c = 2$ y uno de los catetos $a = x$, de este modo el otro cateto mide $b = \sqrt{4-x^2}$. Y para t, el ángulo formado por c y a se cumplen las siguientes relaciones trigonométricas: $sen(t) = \frac{x}{2}$, de modo que $dx = 2cos(t)dt$, $cos(t) = \frac{\sqrt{4-x^4}}{2}$ y $tg(t) = \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}$. sustituyendo tenemos que

$$I_2 \longrightarrow \int (4sen^2(t)) \cdot (2cos(t)) \cdot (2cos(t))dt = 16 \int sen^2(t) \cdot cos^2(t)dt$$

Note que obtuvimos una de las integrales que ya resolvimos, por lo que podemos sustituir el resultado.

$$16 \int sen^2(t) \cdot cos^2(t)dt = 16\left(\frac{t}{8} - \frac{sen(4t)}{32} + C_1\right) = 2t - \frac{sen(4t)}{2} + C$$

Para regresar a la variable original consideremos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} sen(2x) &= 2sen(x)cos(x) \\ cos(2x) &= cos^2(x) - sen^2(x) \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\frac{sen(4t)}{2} = sen(2t) \cdot cos(2t) = 2sen(t) \cdot cos(t) \cdot (cos^2(x) - sen^2(x)).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{2}) - 2\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{4-x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right) + C \\ &= 2 \operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{8}x \cdot \sqrt{4-x^2} \cdot (4-2x^2) + C \\ &= 2 \operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{8}\sqrt{4-x^2} \cdot (4x-2x^3) + C \end{aligned}$$

■