Clase 27

Integración de funciones racionales

Ejemplo 1 *Halle* $I_1 = \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx$

Solución.

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{4}{x^2+2x+2}dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{4}{(x+1)^2+1}dx\right)$$

Sea $u = x^2+2x+2$, entonces $du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$. De este modo

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx \longrightarrow \int \frac{du}{u} = ln(u) + C$$

Y sea $v = x+1$, $dv = dx$, de modo que

$$\int \frac{4}{(x+1)^2+1}dx \longrightarrow \int \frac{4}{v^2+1} = \arctan(v) + C$$

Por lo que

$$I_1 = \frac{1}{2}ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + C$$

■

Ejemplo 2 *Halle* $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

Solución. Note que se puede reescribir el integrando de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

Por lo que

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \arctan(x) - \int x\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

Consideremos $f = x$, $\frac{df}{dx} = 1$ y $\frac{dg}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $g = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$, de modo que

$$\int x\frac{x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$

Por lo tanto

$$I_2 = \arctan(x) + \frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\arctan(x) + C$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

■

Ejemplo 3 *Halle* $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$

Solución. Reescribamos el integrando.

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)^2}$$

De modo que

$$I_3 = \frac{16}{9}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)^2}$$

Resulta ser una integral de la forma $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$ bajo el cambio de variable $u = \left(\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)$, $dx = \sqrt{\dfrac{3}{4}}du$. Por lo tanto

$$I_3 = \frac{16}{9}\sqrt{\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right) + \frac{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)}{2\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right)}\right] + C$$

■

Ejemplo 4 *Halle* $I_4 = \displaystyle\int sec(x)dx$

Solución. Trabajemos el integrando.

$$\begin{aligned} sec(x) = \frac{1}{cos(x)} = \frac{cos(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos(x)}{1-sen^2(x)} &= \frac{cos(x)}{(1+sen(x))(1-sen(x))} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{cos(x)}{1+sen(x)} + \frac{cos(x)}{1-sen(x)}\right). \end{aligned}$$

De modo que

$$I_4 = \int \frac{1}{2}\left(\frac{cos(x)}{1+sen(x)} + \frac{cos(x)}{1-sen(x)}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{cos(x)}{1+sen(x)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{cos(x)}{1-sen(x)}dx$$

Consideremos los siguientes cambios de variable: Sea $u = 1 + sen(x)$, $du = cos(x)dx$ y Sea $v = 1 - sen(x)$, $dv = -cos(x)dx$. De modo que

$$\int \frac{cos(x)}{1+sen(x)}dx \longrightarrow \int \frac{du}{u} = ln(u) + C$$
$$\int \frac{cos(x)}{1-sen(x)}dx \longrightarrow \int \frac{-dv}{v} = -ln(v) + C$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
I_4 = \frac{1}{2}ln(1+sen(x)) - \frac{1}{2}ln(1+sen(x)) + C &= \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+sen(x)}{1-sen(x)} \cdot \frac{1+sen(x)}{1+sen(x)}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}ln\left(\frac{(1+sen(x))^2}{1-sen^2(x)}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}ln\left(\left[\frac{1+sen(x)}{cos(x)}\right]^2\right) + C \\
&= \frac{2}{2}ln\left(\frac{1+sen(x)}{cos(x)}\right) + C \\
&= ln\Big(sec(x) + tg(x)\Big) + C
\end{aligned}
$$

■

Como se aprecia en los ejemplos anteriores, es posible integrar funciones racionales utilizando los métodos que hemos estudiado, sin embargo, en la mayoría de casos, es necesario primero trabajar la expresión en el integrando antes de que se clara la manera de proceder.

En general, la integración de una función racional arbitraria dependerá de propiedades de estas funciones, consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra, y de los siguientes resultados, cuya demostración será omitida pues no concierne a este curso.

Teorema 5 *Cada función polinómica $q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$ puede escribirse como un producto*

$$q(x) = (x-\alpha)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta x+\gamma)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l},$$

donde $r_1 + r_2 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$.

Teorema 6 (Descomposición en fracciones parciales) *Si $n < m$ y*

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \\
q(x) &= x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0 \\
&= (x-\alpha)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta x+\gamma)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}
\end{aligned}
$$

Entonces una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede escribirse en la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2+b_ix+c_i)^r}$$

Ejemplo 7 *Halle $I = \displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+2}{x^4-x^3-x+1}$.*

Solución. Comencemos calculando la descomposición en fracciones parciales del integrando, usando los teoremas anteriores.

Sean $p(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ y $q(x) = x^4 - x^3 - x + 1$. Factoricemos $q(x)$.

$$q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1),$$

donde $x^2 + x + 1$ ya no puede ser factorizado pues tiene discriminante negativo.

Se cumplen las hipótesis del teorema de descomposición en fracciones parciales por lo que deben existir A, B, C y D en $\mathbb{R}$ tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Para encontrar el valor de dichas constantes, es necesario simplificar la expresión a la derecha y comparar numerador y denominador término a término con p y q respectivamente.

Veamos que

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} &= \\
&= \frac{A(x^3+x^2+x-x^2-x-1) + Bx^2 + Bx + B + Cx^3 + Dx^2 - 2Cx^2 - 2Dx + Cx + D}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (B+D-2C)x^2 + (B-2D+C)x + (-A+B+C)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}
\end{aligned}$$

Notemos que el denominador es q(x), mientras que para el numerador deben cumplirse las siguientes igualdades, que forman un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas que, afortunadamente, tiene solución única.

$$A + C = 1 \tag{1}$$
$$B + D - 2C = 3 \tag{2}$$
$$B - 2D + C = 0 \tag{3}$$
$$-A + B + C = 2 \tag{4}$$

Si sumamos (1) y (4) se tiene $A + C - A + B + D = 1 + 2 \iff B + C + D = 3$. Al igualar esta expresión con (2) se sigue que $B + C + D = B - 2C + D \iff C = -2C \iff C = 0$. Sustituyendo en (1) obtenemos $A = 1$.

Ahora sustituyendo el valor explícito de C en (3) se sigue que $B = 2D$, sustituyendo esta expresión de B en (2) obtenemos $3D = 3 \iff D = 1$. Finalmente, $B = 2$.

Por lo tanto

$$\int \frac{x^3+3x^2+2}{x^4-x^3-x+1} = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Donde las primeras integrales puedes resolverse fácilmente con el mismo cambio de variable, $u = x - 1$, $du = dx$, mientras que la tercera se puede trabajar de la misma manera que I_3 en el Ejemplo 3 de esta clase, por lo que queda como ejercicio resolverlas explícitamente. ∎