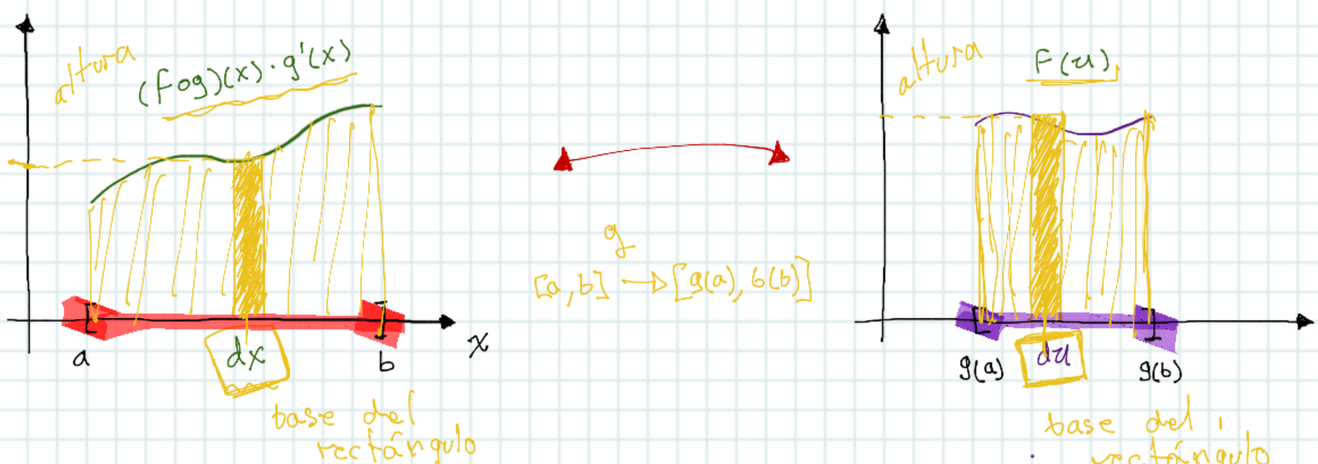
Clase 28

Un comentario sobre el T.C.V y diferenciales

¿Qué está pasando al "cambiar la variable"?

$$\int_a^b (f\circ g)(x)\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

números reales



Estamos cambiando el intervalo de integración, por lo que cambian las bases y alturas de los rectángulos con que se calculan las sumas superiores e inferiores, no obstante: El teorema nos asegura que los supremos e ínfimos de las respectivas sumas inferiores y sumas superiores coinciden.

Es muy importante que g sea una función continua, para asegurar que $[g(a), g(b)]$ es cerrado y acotado. podemos integrar

A su vez, el hecho de que f' y g' sean continuas, es lo que garantiza que podemos aplicar el T. C. V. a integrales indefinidas pues por el 1T.F.C., siempre existe una primitiva para este tipo de funciones.

¿Por qué no podemos asegurar la igualdad desde el comienzo, al trabajar con integrales indefinidas?

Porque el teorema establece una igualdad entre números reales, no entre conjuntos de primitivas.

¿Y entonces por qué al final sí se obtiene una igualdad entre conjuntos?

Porque al trabajar en un intervalo arbitrario, $[a,b] \subseteq Dom_I((f\circ g)g')$, es posible afirmar que se cumple para todo $x \in Dom_I((f\circ g)g')$ donde $Dom_I(f)$ denota el dominio de integrabilidad de una función.

Una definición formal para "df", la diferencial de una función:

Sea f derivable, recordemos que, la derivada de f respecto a x se define como:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

donde $\boxed{\text{"}\Delta x\text{"}}$ denota un número real.

$h = \Delta x$

Definimos.- la diferencial de f, $df : [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, como

$$df(x,\Delta x) = f'(x)\Delta x$$

Observación: para $f(x) = x$ se tiene $dx(x,\Delta x) = x'\,\Delta x = 1\Delta x$

por lo que $\boxed{dx = \Delta x}$ de modo que $df(x,\Delta x) = f'(x)\,dx$

$du = u'(x)\,dx$

Ejemplo: $\int_a^b \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$

así lo nombro

Si hago $g(x) = \operatorname{sen}(x) = u$ $\qquad f(u) = u$

$g'(x) = \cos(x) \qquad\qquad f'(u) = 1$

$dg(x,\Delta x) = \overset{u'(x)\Delta x}{\cos(x)\,dx} = du$ $\qquad \underbrace{g'(x)\,(f\circ g)(x)} = \underbrace{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$

Además, existe $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$.

Por lo tanto $\int_a^b \underbrace{(f\circ g)(x)\,g'(x)}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$

$$\int_a^b \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \int_{\operatorname{sen}(a)}^{\operatorname{sen}(b)} u\;du$$

$$\int_a^b \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2(b)}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2(a)}{2}$$

$$= \left.\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2}\right|_a^b$$

saltate este paso

Una vez que tenemos la igualdad entre números, se puede afirmar la igualdad entre primitivas

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} + C$$

$$\int \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx \longrightarrow \int u\,du$$

$u(x) = \mathrm{sen}(x)$

$du = \cos(x)\,dx$

me va a ayudar a calcular

$$\int_a^b \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx = \left.\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{2}\right|_a^b + C$$

me regreso

$u = \mathrm{sen}(x)$

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$$