Ayudantía 23
Primeros cálculos con el polinomio de Taylor

Ejercicio 1. *Halle los polinomios de Taylor del grado indicado alrededor del punto indicado para las siguientes funciones.*

(i). $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$*; grado* 3*, alrededor de* $x = 0$*.*

(ii). $g(x) = x^5 + x^3 + x$*; grado* 4*, alrededor de* $x = 1$*.*

Demostración. (i) Por la definición del polinomio de Taylor tenemos que calcular

$$\begin{aligned} p_{3,f,0}(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-0)^3 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 \end{aligned}$$

Tenemos que $f(0) = e^{\operatorname{sen}(0)} = e^0 = 1$. Además, por la regla de la cadena, $f'(x) = \cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)}$, de donde $f'(0) = 1$. Ahora, por la regla de Leibniz obtenemos que $f''(x) = \cos^2(x)e^{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)e^{\operatorname{sen}(x)}$, así que $f''(0) = 1$. Finalmente,

$$f'''(x) = 2\cos(x)\operatorname{sen}(x)e^{\operatorname{sen}(x)} + \cos^3(x)e^{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)} - cos(x)e^{\operatorname{sen}(x)},$$

por lo cual $f'''(0) = 0$. Todo lo anterior implica que

$$p_{3,f,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

(ii) Nuevamente, por la definición del polinomio de Taylor, tenemos que calcular

$$\begin{aligned} p_{4,g,1}(x) &= g(1) + \frac{g^{(1)}(1)}{1!}(x-1) + \frac{g^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{g^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-2)^2 + \frac{g^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{g^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4. \end{aligned}$$

Vemos que $g(1) = 3$. Luego, $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$, por lo que $g'(1) = 5 + 3 + 1 = 9$. También, $g''(x) = 20x^3 + 6x$, de donde $g''(1) = 20 + 6 = 26$. Además, $g^{(3)}(x) = 60x^2 + 6$, así que $g^{(3)}(1) = 60 + 6 = 66$. Ahora, $g^{(4)}(x) = 120x$, por lo cual $g^{(4)}(1) = 120$. En conclusión,

$$\begin{aligned} p_{4,g,1}(x) &= 3 + 9(x-1) + \frac{26}{2}(x-1)^2 + \frac{66}{6}(x-1)^3 + \frac{120}{24}(x-1)^4 \\ &= 3 + 9(x-1) + 13(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + 5(x-1)^4. \end{aligned}$$

∎

ATENCIÓN: El inciso (i) muestra que a pesar de que $p_{3,f,0}$ se llama *polinomio de Taylor de grado* 3 *alrededor de* 0, en realidad se trata de un polinomio de grado 2. Por ello, no se puede afirmar que el polinomio de Taylor de grado n de una función tiene grado n: únicamente puede afirmarse que **el poliniomio de Taylor de grado** n **tiene, a lo más, grado** n, pero puede tener grado estrictamente menor.

Ejercicio 2. *Escriba cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x-3)$.*

(i). x^2-4x-2.

(ii). x^5.

Demostración. Notamos que nos basta calcular, a lo más, el polinomio de Taylor de grado igual al del polinomio que estemos trabajando, pues la derivada de un orden mayor al grado del polinomio siempre será cero.

(i) Calculamos el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor de 3 para $f(x)=x^2-4x-2$, es decir,

$$\begin{aligned} p_{2,f,3}(x) &= f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 \qquad (1)\\ &= f(3)+f'(3)(x-3)+\frac{f''(3)}{2}(x-3)^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

Notamos que $f(3)=9-12-2=-5$. También, $f'(x)=2x-4$, por lo cual $f'(3)=6-4=2$. Como $f''(x)=2$, tenemos que $f''(3)=2$. Luego,

$$\begin{aligned} p_{2,f,3}(x) &= -5+2(x-3)+(x-3)^2\\ &= -5+2x-6+x^2-6x+9\\ &= -2-4x+x^2\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^2-4x-2=(x-3)^2+2(x-3)-5$.

(ii) Sea $g(x)=x^5$. Calculemos su polinomio de Taylor de grado 5 alrededor de 3. Tenemos que $g(3)=3^5=243$. Como $g'(x)=5x^4$, entonces $g'(3)=5(3^4)=405$. También, $g^{(2)}(x)=20x^3$, por lo cual $g^{(2)}(3)=20(3^3)=540$. Como $g^{(3)}(x)=60x^2$, se tiene que $g^{(3)}(3)=540$. Ahora, $g^{(4)}(x)=120x$, de donde $g^{(4)}(x)=120(3)=360$. Finalmente, $g^{(5)}(x)=120$, así que $g^{(5)}(3)=120$. Luego, por definición del polinomio de Taylor se cumple que

$$\begin{aligned} p_{5,g,3}(x) &= g(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\frac{f^{(3)}(3)}{3!}(x-3)^3+\frac{f^{(4)}(3)}{4!}(x-3)^4+\frac{f^{(5)}(3)}{5!}(x-3)^5\\ &= 243+405(x-3)+\frac{540}{2}(x-3)^2+\frac{540}{6}(x-3)^3+\frac{360}{24}(x-3)^4+\frac{120}{120}(x-3)^5\\ &= 243+405(x-3)+270(x-3)^2+90(x-3)^3+15(x-3)^4+(x-3)^5\end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-p_{5,g,3}(x)}{(x-3)^5}=0$$

por ser una propiedad del polinomio de Taylor. Esto significa que g y $p_{5,g,3}$ son iguales hasta el orden 5 en 3. Como g y $p_{5,g,3}$ son funciones polinomiales, esta igualdad hasta el orden 5 alrededor de 3 implica que $g=p_{5,g,3}$ (vea el **Teorema 7** de la **Clase 31**). Por lo tanto

$$x^5=243+405(x-3)+270(x-3)^2+90(x-3)^3+15(x-3)^4+(x-3)^5.$$

∎