Ayudantía 24
Aplicaciones del resto de Taylor para el cálculo de cotas

Para comenzar esta sesión, tal como indicó Oscar en la **Clase 34**, daremos una cota para la forma integral del resto de Taylor de la función exponencial en el caso de valores negativos.

Lema 1. *Si* $x \leq 0$, *entonces*

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \ dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Demostración. Observamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \ dt \right| &= \left| - \int_x^0 \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \ dt \right| \\ &= \left| \int_x^0 \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \ dt \right| \qquad (1) \\ &\leq \int_x^0 \left| \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \right| \ dt \qquad (2) \\ &= \frac{1}{n!} \int_x^0 e^t |x-t|^n \ dt \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_x^0 |x-t|^n \ dt, \qquad (3) \end{aligned}$$

donde (1) se obtiene porque $|-1| = 1$ y usamos las propiedades del valor absoluto, (2) se sigue a partir de la monotonía de la integral respecto al valor absoluto y (3) se cumple por la monotonía de la integral porque $e^t \leq 1$ si $t \leq 0$.

Ahora, notamos que si $x \leq t \leq 0$, entonces $x - t \leq 0$, por lo cual $|x-t| = t - x$, entonces

$$\begin{aligned} \int_x^0 |x-t|^n \ dt &= \int_x^0 (t-x)^n \ dt \\ &= \left. \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right|_x^0 \\ &= \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \qquad (4) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene porque $|x| = -x$ porque $x < 0$

Finalmente, al combinar (3) y (4) obtenemos que

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \ dt \right| \leq \frac{1}{n!} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Esto termina la prueba. ∎

Ejercicio 2. *Aproxime cada uno de los siguientes números con el error indicado.*

(i). $\operatorname{sen}(1)$, *error* $< 10^{-10^{10}}$.

(ii). e^{10}, *error* $< 10^{-30}$.

Demostración. (i) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Notamos que para cualesquiera $y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $f^{(n)}(y)$, por lo cual, para cualquier $x > 0$ (y para cualquier $n \in \mathbb{N}$) se cumple que las funciones $f', \ldots, f^{(n+1)}$ están definidas en $[0, x]$. Por lo anterior, estamos en las condiciones de aplicar el Teorema de Taylor. Ya se demostró que la expresión de la función seno como suma de su polinomio de Taylor alrededor de 0 (¿cuál es el grado de dicho polinomio?) y la forma integral del resto de Taylor está dada por:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} \; dt. \tag{5}$$

Para resolver este problema haremos algunas estimaciones acerca del resto de Taylor que nos permitan controlar su magnitud. Notemos que para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$, por lo cual $|\operatorname{sen}^{2n+2}(t)| \leq 1$; y lo anterior implica que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} \; dt \right| &\leq \int_0^x \left| \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} \right| \; dt \\
&\leq \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x \left| \operatorname{sen}^{2n+2}(t) \right| |x-t|^{2n+1} \; dt \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x |x-t|^{2n+1} \; dt \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \; dt
\end{aligned} \tag{6}$$

Ahora, como

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{2n+1} \; dt &= \left. \frac{-(x-t)^{2n+2}}{2n+2} \right|_{t=0}^{t=x} \\
&= \frac{x^{2n+2}}{2n+2},
\end{aligned} \tag{7}$$

al combinar esto con la desigualdad (6) obtenemos que si $x > 0$ entonces

$$\left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} \; dt \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{8}$$

Procedemos ahora a la solución del problema planteado. Al sustituir $x = 1$ en la desigualdad (8), notamos que nos basta obtener n tal que

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-10^{10}}$$

para que el error cumpla la propiedad deseada (observe que lo que estamos haciendo es acotar el resto de Taylor). La desigualdad anterior se satisface si

$$(2n+2)! > 10^{10^{10}}. \tag{9}$$

A partir de la desigualdad anterior no es difícil proponer valores para n que aseguren que se satisface (9): vemos que si $2n + 2 = 10^{10^{10}}$, esto es,

$$n = \frac{10^{10^{10}}}{2} - 1.$$

entonces claramente se cumple (9) (¿puede proponer valores más pequeños de n?). Finalmente, al usar el desarrollo dado en (5), cuando $x = 1$, obtenemos que una aproximación de $\operatorname{sen}(1)$ con un error menor a $10^{-10^{10}}$ es

$$\sum_{i=0}^{\frac{10^{10^{10}}}{2}-1} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}.$$

(ii) Tenemos que e^x se puede expresar como la suma de su polinomio de Taylor alrededor de 0 y su resto de Taylor como sigue:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + R_{n,\exp,0}(x), \tag{10}$$

donde R_n es el resto de Taylor de orden n.

Recordamos el siguiente resultado (obtenido luego de calcular el polinomio de Taylor de la función exponencial alrededor de 0): si $x > 0$, entonces

$$0 < R_{n,\exp,0}(x) < \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{11}$$

Ahora, al sustituir $x = 10$ en (10) obtenemos

$$e^{10} = \sum_{i=0}^{n} \frac{10^i}{i!} + R_{n,\exp,0}(10), \tag{12}$$

de donde nos interesa obtener $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|R_{n,\exp,0}(10)| < 10^{-30},$$

así que, en virtud de (11), nos basta con encontrar n tal que

$$\frac{4^{10}10^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-30}. \tag{13}$$

Para continuar, notemos que

$$\frac{1}{10^{37}} > \frac{10^{200}}{200!}$$

porque

$$1 > \frac{10^{163}}{163!}$$

y también

$$\frac{1}{10^{37}} > \frac{10^{37}}{(164)(165)\cdots(200)}.$$

Como $10^7 > 8^7 = 2^{21} > 2^{20} = 4^{10}$, se sigue que

$$\begin{aligned} 10^{-30} &= \frac{10^7}{10^{37}} \\ &> \frac{4^{10}10^{200}}{200!} \end{aligned} \tag{14}$$

Así, al considerar $n = 199$ obtenemos que se satisface la desigualdad (13), por lo que en virtud de la ecuación (12) obtenemos que una aproximación de e^{10} con un error menor que 10^{-30} es

$$\sum_{i=0}^{199} \frac{10^i}{i!}.$$

■