Última actualización: 20 de enero de 2022

Ayudantía 25
Aplicaciones del Teorema de Taylor

Ejercicio 1. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\arctan(x) - x^2}{1-\cos(x^2)}$$

Demostración. Para la solución de este problema, usaremos la siguiente propiedad del resto de Taylor.

Lema auxiliar. Si $f(x) = p_{n,f,c}(x) + R_{n,f,c}(x)$ para toda x, donde $p_{n,f,c}$ es el polinomio de Taylor de f de grado n alrededor de c, y $R_{n,f,c}$ es su resto de Taylor (de grado n), entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{R_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} = 0$$

■

La prueba del lema auxiliar es inmediata porque $R_{n,f,c}(x) = f(x) - P_{n,f,c}(x)$ y la primera propiedad del polinomio de Taylor que se demostró fue que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - p_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Ahora, los desarrollos de Taylor de grado 4 alrededor de 0 de las funciones seno, $\cos(x^2)$ y arcotangente son

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + R_{4,\operatorname{sen},0}(x)\\
\cos(x^2) &= 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{4!} + R_{4,\cos(x^2),0}(x)\\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + R_{4,\arctan,0}(x)
\end{aligned}$$

(realice los cálculos para verificar que lo que se afirma es correcto).

Ahora, al sustituir las expresiones anteriores en la función original obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)\arctan(x) - x^2}{1-\cos(x^2)} &= \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + R_{4,\operatorname{sen},0}(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + R_{4,\arctan,0}(x)\right) - x^2}{1 - \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + R_{4,\cos(x^2),0}(x)\right)}\\
&= \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{3}\right) - x^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) R_{4,\arctan,0}(x) + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) R_{4,\operatorname{sen},0}(x) + R_1(x)}{\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{4!} - R_{4,\cos(x^2),0}(x)}\\
&= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{18} - x^2 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) R_{4,\arctan,0}(x) + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) R_{4,\operatorname{sen},0}(x) + R_1(x)}{\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{4!} - R_{4,\cos(x^2),0}(x)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{18} + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) R_{4,\text{arctan},0}(x) + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) R_{4,\text{sen},0}(x) + R_1(x)}{\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{4!} - R_{4,\cos(x^2),0}(x)}$$

donde $R_1(x) = R_{4,\text{arctan},0}(x) R_{4,\text{sen},0}(x)$.

Luego, si $x \neq 0$, a partir de las igualdades anteriores se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x)\arctan(x) - x^2}{1 - \cos(x^2)} &= \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} \left(\frac{-\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{18} + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) R_{4,\text{arctan},0}(x) + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) R_{4,\text{sen},0}(x) + R_1(x)}{\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{4!} - R_{4,\cos(x^2),0}(x)} \right) \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{18} + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \frac{R_{4,\text{arctan},0}(x)}{x^4} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \frac{R_{4,\text{sen},0}(x)}{x^4} + \frac{R_1(x)}{x^4}}{\frac{1}{2} - \frac{x^4}{4!} - \frac{R_{4,\cos(x^2),0}(x)}{x^4}}
\end{aligned}$$

Por lo anterior

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\arctan(x) - x^2}{1 - \cos(x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{18} + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \frac{R_{4,\text{arctan},0}(x)}{x^4} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \frac{R_{4,\text{sen},0}(x)}{x^4} + \frac{R_1(x)}{x^4}}{\frac{1}{2} - \frac{x^4}{4!} - \frac{R_{4,\cos(x^2),0}(x)}{x^4}} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\
&= -1
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se obtiene porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{4,\text{sen},0}(x)}{x^4} = 0 = \lim_{x\to 0} \frac{R_{4,\cos(x^2),0}(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{R_{4,\text{arctan},0}(x)}{x^4}$$

en virtud del Lema auxiliar, y también

$$\lim_{x\to 0} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0 = \lim_{x\to 0} \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

(¿por qué es importante mencionar esta segunda línea?). Además, se cumple que

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{4,\text{arctan},0}(x)}{x^4} = 0$$

y $R_{4,\text{sen},0}(x)$ es una función acotada en un intervalo (p, q) tal que $0 \in (p, q)$, así que, por un teorema de Cálculo Diferencial que asegura que si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y g es acotada en un intervalo (b, c) tal que $0 \in (b, c)$ entonces $\lim_{x\to 0}(fg)(x) = 0$, se cumple que

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{R_{4,\text{arctan},0}(x) R_{4,\text{sen},0}(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(R_{4,\text{sen},0}(x) \frac{R_{4,\text{arctan},0}(x)}{x^4} \right) = 0.$$

En conclusión,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\arctan(x) - x^2}{1 - \cos(x^2)} = -1.$$

∎

Ejercicio 2. *Suponga que a_i y b_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor de grado n en c de las funciones $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, respectivamente, es decir,*

$$a_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}, \text{ y } b_i = \frac{g^{(i)}(c)}{i!}.$$

Halle los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor en c de las siguientes funciones en términos de los coeficientes a_i y b_i.

(i). $f + g$

(ii). fg

(iii). f'

(iv). $h(x) = \int_c^x f(t)\, dt$

Demostración. A partir de las hipótesis obtenemos que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + R_{n,f,c}(x)$$

y

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + R_{n,g,c}(x).$$

(i) Para toda x tenemos que

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + R_{n,f,c}(x) + \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(c)}{i!}(x-c)^i + R_{n,g,c}(x)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{f^{(i)}(c)}{i!} + \frac{g^{(i)}(c)}{i!}\right)(x-c)^i + R_{n,f,c}(x) + R_{n,g,c}(x)\end{aligned}$$

Ahora, notemos

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{f^{(i)}(c)}{i!} + \frac{g^{(i)}(c)}{i!}\right)(x-c)^i$$

es igual a $f+g$ hasta el orden n en a porque

$$\lim_{x\to c} \frac{(f+g)(x) - Q(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{R_{n,f,c}(x) + R_{b,g,c}(x)}{(x-c)^n} = 0$$

por el Lema auxiliar mencionado en el Ejercicio anterior. Esto implica que $Q = p_{n,f+g,c}$ (es un Corolario de la igualdad de polinomios en $(x-c)$ que son iguales hasta el orden n en c). Por lo tanto,

$$c_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!} + \frac{g^{(i)}(c)}{i!} = a_i + b_i.$$

(ii) Notamos que

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i + R_{n,f,c}(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i(x-c)^i + R_{n,g,c}(x)\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i(x-c)^i\right) + R_{n,f,c}(x)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i(x-c)^i\right) + R_{n,g,c}(x)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i\right)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-c) + \cdots + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)(x-c)^n + R_1(x)$$

donde

$$R_1(x) = \sum_{i+j>n} a_i b_j (x-c)^{i+j} + R_{n,f,c}(x)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i(x-c)^i\right) + R_{n,g,c}(x)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i\right).$$

Notamos que

$$\lim_{x\to c} \frac{R_1(x)}{(x-c)^n} = 0 \tag{1}$$

porque

$$\lim_{x\to c} \frac{R_{n,f,c}(x)}{(x-c)^n} = 0 = \lim_{x\to c} \frac{R_{n,g,c}(x)}{(x-c)^n}$$

en virtud del Lema auxiliar presentado en el Ejercicio anterior, además, $\sum a_i(x-c)^i$ y $\sum b_i(x-c)^i$ son acotados, lo cual implica que el límite de su producto es cero; además,

$$\lim_{x\to c} \frac{\sum\limits_{i+j>n} a_i b_j (x-c)^{i+j}}{(x-c)^n} = 0$$

pues al hacer la división, en cada sumando queda $a_i b_j (x-c)^{i+j-n}$, y como $i+j-n>0$, el límite cuando x tiende a c es cero. Si denotamos

$$Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-c) + \cdots + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right)(x-c)^n,$$

la ecuación (1) implica que $p_{n,fg,c}$ y Q son iguales hasta orden n en c, de donde se sigue que $Q = p_{n,fg,c}$. Por lo tanto,

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

(iii) Observamos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(x-c)^i\right)' + \left(R_{n,f,c}\right)'(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i a_i (x-c)^{i-1} + \left(R_{n,f,c}\right)'(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} (x-c)^j + \left(R_{n,f,c}\right)'(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $c_i = (i+1)a_{i+1}$ si $i \le n-1$. ¿Qué podemos decir acerca de c_n?

(iv) Ya que $h(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ y conocemos otra expresión para f, entonces

$$h(x) = \int_c^x \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(t-c)^i + R_{n,f,c}(t)\right)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \int_c^x a_i (x-t)^i \ dt + \int_c^x R_{n,f,c}(t) \ dt \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} (x-c)^{i+1} + \int_c^x R_{n,f,c}(t) \ dt.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $c_0 = 0$ y $c_i = \frac{a_{i-1}}{i}$ si $0 < i \leq n$ (¿por qué?). ∎